

A ARTE DE RESOLVER PROBLEMAS

G. POLYA



EDITORA INTERCIÊNCIA



A Arte de Resolver Problemas

UM NOVO ASPECTO DO MÉTODO MATEMÁTICO

G. POLYA

Universidade Stanford

TRADUÇÃO E ADAPTAÇÃO

Heitor Lisboa de Araújo

Universidade Federal do Rio de Janeiro



UFSC-BU

(BU)

INTERCIÊNCIA

Second Edition Copyright © 1975 by G. Polya
Publicado pela Princeton University Press com o título:
"How to Solve it" A New Aspect of Mathematical Method

161771

SC-00048036-4

Direitos Reservados em 1977 por
Editores Interciência Ltda.
Rio de Janeiro, Brasil
Impresso no Brasil
1ª Reimpressão - 1986
2ª Reimpressão - 1995

AQUISIÇÃO POR COMPRA
ADQUIRIDO DE *[assinatura]*

510.6
p781a

Programação Visual
Interciência Arte

30 MAR. 2000

PREÇO 23,00
REGISTRO 0.322.204-7
DATA DO REGISTRO 29.8.2000

Composição do texto
Interciência

CIP - Brasil. Catalogação-na-fonte
Sindicato Nacional dos Editores de Livros, RJ.

Polya, G. (George), 1887 -
P841a A arte de resolver problemas : um novo aspecto do método matemático / G. Polya ; tradução e adaptação Heitor Lisboa de Araújo. — 2. reimpr. — Rio de Janeiro : interciência, 1995
196p.

Tradução de: How to solve it
Inclui bibliografia.

1. Lógica. 2. Lógica simbólica e matemática. I. Título

CDD - 511.3

CDU - 164

95-1414

É proibida a reprodução total ou parcial por quaisquer meios
sem autorização por escrito da editora



Editora Interciência Ltda.
Av. Pres. Vargas, 435 - sala 604 - tels. 242-2861 / 242-9095
CEP 20077-900 - Rio de Janeiro - RJ

Prefácio à Primeira Tiragem

Uma grande descoberta resolve um grande problema, mas há sempre uma pitada de descoberta na resolução de qualquer problema. O problema pode ser modesto, mas se ele desafiar a curiosidade e puser em jogo as faculdades inventivas, quem o resolver por seus próprios meios, experimentará a tensão e gozará o triunfo da descoberta. Experiências tais, numa idade susceptível, poderão gerar o gosto pelo trabalho mental e deixar, por toda a vida, a sua marca na mente e no caráter.

Um professor de Matemática tem, assim, uma grande oportunidade. Se ele preenche o tempo que lhe é concedido a exercitar seus alunos em operações rotineiras, aniquila o interesse e tolhe o desenvolvimento intelectual dos estudantes, desperdiçando, dessa maneira, a sua oportunidade. Mas se ele desafia a curiosidade dos alunos, apresentando-lhes problemas compatíveis com os conhecimentos destes e auxiliando-os por meio de indagações estimulantes, poderá incutir-lhes o gosto pelo raciocínio independente e proporcionar-lhes certos meios para alcançar este objetivo.

Um estudante cujo curso inclui Matemática tem, também, uma oportunidade única, que ficará evidentemente perdida se ele considerar esta matéria como uma disciplina com que precisa obter tantos créditos e a qual deverá esquecer, o mais rápido possível, assim que passar pelas provas finais. A oportunidade pode ser desperdiçada até mesmo se o estudante tiver algum talento natural para a Matemática, pois ele, como todos os outros, precisa descobrir seus talentos e seus gostos: ninguém poderá saber se gosta de torta de maçã se nunca a houver provado. É possível, porém, que chegue a perceber que um problema de Matemática pode ser tão divertido quanto um jogo de palavras cruzadas, ou que o intenso trabalho mental pode ser um exercício tão agradável quanto uma animada partida de tênis. Tendo experimentado prazer no estudo da Matemática, ele não a esquecerá facilmente e haverá, então, uma boa probabilidade de que ela se torne alguma coisa mais: um *hobby*, um instrumento profissional, a própria profissão ou uma grande ambição.

O autor recorda-se do seu tempo de estudante, um aluno um pouco ambicioso, ávido por compreender alguma coisa de Matemática e de Física. Ele assistia às aulas, lia livros, tentava assimilar as resoluções e os fatos que lhe eram apresentados, mas havia uma questão que o perturbava repetidamente: "Sim, a resolução parece que funciona, que está certa, mas como seria possível inventar, eu próprio, essas coisas?" Hoje o autor ensina Matemática numa universidade. Pensa, ou espera, que alguns dos seus alunos mais interessados façam perguntas semelhantes e procura satisfazer a curiosidade deles. Na tentativa de compreender, não só como se resolve este ou aquele

problema, mas também as motivações e procedimentos da resolução, e procurando explicar a outros essas motivações e esses procedimentos, ele foi afinal levado a escrever o presente livro. O autor tem a esperança de que este venha a ser útil a professores que desejem desenvolver nos seus alunos a capacidade de resolver problemas e a estudantes que realmente queiram desenvolver a sua própria capacidade.

Muito embora este livro dedique atenção especial às necessidades de alunos e professores, ele deverá interessar a qualquer um que se preocupe com os meios e as maneiras da invenção e da descoberta. É possível que este interesse seja mais difundido do que se presume, sem maior reflexão. O espaço dedicado pelos jornais e revistas populares a palavras cruzadas e a outros enigmas parece revelar que as pessoas passam algum tempo resolvendo problemas sem aplicação prática. Por trás do desejo de resolver este ou aquele problema que não resulta em nenhuma vantagem material, pode haver uma curiosidade mais profunda, um desejo de compreender os meios e as maneiras, as motivações e os procedimentos da resolução.

As páginas seguintes foram escritas de forma um pouco concisa, mas tão simples quanto possível, e fundamentam-se num longo e sério estudo dos métodos de resolução. Este tipo de estudo, chamado *Heurística* por alguns autores, não está em moda nos dias que correm, mas tem um longo passado e, talvez, algum futuro.

Pelo estudo dos métodos de resolução de problemas, percebemos um novo aspecto da Matemática. Sim, porque ela tem dois aspectos: é a rigorosa ciência de Euclides, mas é também uma outra coisa. A Matemática, apresentada da maneira euclidiana, revela-se uma ciência dedutiva, sistemática, mas a Matemática em desenvolvimento apresenta-se como uma ciência indutiva, experimental. Ambos os aspectos são tão antigos quanto a própria ciência. Mas o segundo aspecto é novo sob um certo ponto de vista: a Matemática *in statu nascendi*, no processo de ser inventada, jamais foi apresentada exatamente desta maneira aos estudantes, aos professores ou ao grande público.

A Heurística tem múltiplas conexões: matemáticos, lógicos, psicólogos, educadores e até filósofos reivindicam partes deste estudo para os seus domínios particulares. O autor, bem ciente da possibilidade de crítica de certos setores e perfeitamente cômico de suas limitações, tem uma reivindicação a fazer: ele tem alguma experiência na resolução de problemas e no ensino da Matemática em diversos níveis.

O assunto é tratado pelo autor com maior profundidade num livro mais extenso que está em fase de conclusão.

Universidade Stanford, 1 de agosto de 1944

Prefácio à Sétima Tiragem

Tenho o prazer de comunicar que consegui agora cumprir, pelo menos em parte, uma promessa feita no prefácio à primeira tiragem: os dois volumes que, sob os títulos *Induction and Analogy in Mathematics* e *Patterns of Plausible Inference*, constituem a minha recente obra *Mathematics and Plausible Reasoning*, continuam a linha de raciocínio iniciada neste livro.

Zurich, 30 de agosto de 1954

Prefácio à Segunda Edição

À presente segunda edição é acrescentada, além de pequenas melhorias, uma nova quarta parte, sob o título "Problemas, Indicações, Soluções".

Quando esta edição estava sendo preparada para impressão, apareceu um estudo (Educational Testing Service, Princeton, N. J. *cf. Time*, 18 de junho de 1956) que parece ter formulado algumas observações muito pertinentes — elas não constituem novidade para as pessoas que sabem das coisas, mas já era tempo de apresentá-las ao grande público: "... a Matemática tem a duvidosa honra de ser a matéria menos apreciada do curso... Os futuros professores passam pelas escolas elementares a aprender a detestar a Matemática... Depois, voltam à escola elementar para ensinar uma nova geração a detestá-la".

Tenho a esperança de que a presente edição, destinada a uma difusão mais ampla, convença alguns de seus leitores de que a Matemática, além de indispensável aos profissionais da Engenharia e ao conhecimento científico, pode ser divertida e também descortinar um panorama de atividade mental no mais alto nível.

Zurich, 30 de junho de 1956

Sumário

Prefácio à Primeira Tiragem do Original	V
Prefácio à Sétima Tiragem do Original	VII
Prefácio à Segunda Edição do Original	VIII
"Como Resolver um Problema" (lista de indagações e sugestões)	XII
Introdução	XV

PARTE 1 — EM AULA

Objetivo

1. Auxílio ao estudante	1
2. Questões, recomendações, operações mentais	1
3. Generalidade	2
4. Bom senso	2
5. Professor e aluno. Imitação e prática	2

Divisões principais, questões principais

6. As quatro fases	3
7. Compreensão do problema	4
8. Exemplo	5
9. Estabelecimento de um plano	5
10. Exemplo	7
11. Execução do plano	8
12. Exemplo	9
13. Retrospecto	10
14. Exemplo	11
15. Abordagens diversas	13
16. O método de questionar do professor	14
17. Questões boas e más	15

Outros exemplos

18. Um problema de traçado geométrico	15
19. Um problema de demonstração	17
20. Um problema de razão de variação	21

PARTE 2 – COMO RESOLVER UM PROBLEMA

Um diálogo	25
----------------------	----

• PARTE 3 – PEQUENO DICIONÁRIO DE HEURÍSTICA

Analogia	29
Bolzano	35
Condicionante	35
Conhece um problema correlato?	36
Considere a incógnita	36
Contradição †	40
Corolário	41
Decomposição e recombinação	41
Definições	47
Demonstração por absurdo e demonstração indireta	52
Descartes	58
Diagnóstico	59
É possível chegar ao resultado por um caminho diferente?	59
É possível obter algo de útil dos dados?	62
É possível reformular o problema? †	63
É possível satisfazer a condicionante?	64
É possível utilizar o resultado?	64
É possível verificar o resultado?	64
Eis um problema correlato que já foi antes resolvido	68
Elementos auxiliares	69
Enigmas	72
Equacionamento	73
Examine a sua suposição	76
Execução do plano	79
Figuras	82
Generalização	85
Heurística	86
Heurística moderna	87
Idéia brilhante	90
Indução e indução matemática	91
Já o viu antes?	96
Leibnitz	96
Lema	96

† Apenas remissões

Notação	97
O futuro matemático	101
O leitor inteligente.	102
O professor de Matemática tradicional	102
O solucionador de problemas inteligente	103
Pappus	104
Paradoxo da invenção.	108
Particularização.	108
Pedantismo e mestria	113
Persistência, esperança, sucesso	114
Por que demonstrar?	115
Problema auxiliar	119
Problema rotineiro.	124
Problemas de determinação, problemas de demonstração	124
Problemas práticos.	126
Progresso e consecução.	129
Qual é a incógnita?	132
Raciocínio heurístico.	132
Redundância †	133
Regras de descoberta	133
Regras de ensino	133
Regras de estilo.	134
Regressão.	134
Sabedoria dos provérbios	139
Se não conseguir resolver o problema proposto	141
Separe as diversas partes da condicionante	142
Simetria.	142
Sinais de progresso.	143
Termos, antigos e novos	151
Teste dimensional	153
Trabalho subconsciente	155
Trace uma figura †	156
Utilizou todos os dados?	156
Variação do problema	158

PARTE 4 – PROBLEMAS, INDICAÇÕES, SOLUÇÕES

Problemas	164
Indicações	167
Soluções	169

† Apenas remissões

Como Resolver Um Problema

COMPREENSÃO DO PROBLEMA

Primeiro.

É preciso *compreender* o problema.

Qual é a incógnita? Quais são os dados? Qual é a condicionante?

É possível satisfazer a condicionante? A condicionante é suficiente para determinar a incógnita? Ou é insuficiente? Ou redundante? Ou contraditória?

Trace uma figura. Adote uma notação adequada.

Separe as diversas partes da condicionante. É possível anotá-las?

ESTABELECIMENTO DE UM PLANO

Segundo.

Encontre a conexão entre os dados e a incógnita.

É possível que seja obrigado a considerar problemas auxiliares se não puder encontrar uma conexão imediata.

É preciso chegar afinal a um plano para a resolução.

Já o viu antes? Ou já viu o mesmo problema apresentado sob uma forma ligeiramente diferente?

Conhece um problema correlato? Conhece um problema que lhe poderia ser útil?

Considere a incógnita! E procura pensar num problema conhecido que tenha a mesma incógnita ou outra semelhante.

Eis um problema correlato e já antes resolvido. É possível utilizá-lo? É possível utilizar o seu resultado? É possível utilizar o seu método? Deve-se introduzir algum elemento auxiliar para tornar possível a sua utilização?

É possível reformular o problema? É possível reformulá-lo ainda de outra maneira? Volte às definições.

Se não puder resolver o problema proposto, procure antes resolver algum problema correlato. É possível imaginar um problema correlato mais acessível? Um problema mais genérico? Um problema mais específico? Um problema análogo? É possível resolver uma parte do problema? Mantenha apenas uma parte da condicionante, deixe a outra de lado; até que ponto fica assim determinada a incógnita? Como pode ela variar? É possível obter dos dados alguma coisa de útil? É possível pensar em outros dados apropriados para determinar a incógnita? É possível variar a incógnita, ou os dados, ou todos eles, se necessário, de tal maneira que fiquem mais próximos entre si? Utilizou todos os dados? Utilizou toda a condicionante? Levou em conta todas as noções essenciais implicadas no problema?

EXECUÇÃO DO PLANO

Terceiro.
Execute o seu plano.

Ao executar o seu plano de resolução, *verifique cada passo*. É possível verificar claramente que o passo está correto? É possível demonstrar que ele está correto?

RETROSPECTO

Quarto.
Examine a solução obtida.

É possível *verificar o resultado*? É possível verificar o argumento?
É possível chegar ao resultado por um caminho diferente? É possível perceber isto num relance?
É possível utilizar o resultado, ou o método, em algum outro problema?

Introdução

As considerações que seguem giram em torno da lista de indagações e sugestões que, sob o título "Como Resolver um Problema", encontram-se nas duas páginas anteriores. Qualquer uma destas questões, quando citada no texto, aparecerá impressa em *itálico*. A lista por elas constituída será mencionada simplesmente como "a lista" ou "a nossa lista".

As páginas seguintes discutirão o objetivo da lista, ilustrarão o seu emprego prático com o auxílio de exemplos e explicarão os seus fundamentos básicos e as respectivas operações mentais. A título de explicação preliminar, pode-se indagar: se, utilizando-as adequadamente, apresentar tais questões a si próprio ajudará a resolver o seu problema; se, utilizando-as adequadamente, dirigir as mesmas questões a um de seus alunos, ajuda-lo-á a resolver o problema que lhe é proposto.

O livro está dividido em quatro partes.

O título da primeira parte é "Em Aula". Contém vinte seções, cada uma delas designada pelo seu número em **negrito**, como, por exemplo, "seção 7". As seções 1 a 5 explanam, em termos gerais, o "Objetivo" de nossa lista. As seções 6 a 10 descrevem o que são as "Divisões Principais, Questões Principais" da lista e discutem um primeiro exemplo prático. As seções 18, 19 e 20 acrescentam "Outros Exemplos".

O título da segunda parte, muito curta, é "Como Resolver um Problema". É apresentada em forma de diálogo, no qual um aluno algo idealizado responde as perguntas de um professor, também algo idealizado.

A terceira parte, a mais extensa, constitui um "Pequeno Dicionário de Heurística". Será mencionada simplesmente como o "Dicionário". Compreende sessenta e sete artigos, dispostos em ordem alfabética. Por exemplo, o significado da palavra HEURÍSTICA (assim, em versalete) está exposto num artigo com este título, encontrado à página 86. Toda referência feita no texto a um dos artigos do Dicionário estará impressa em VERSALETE. Certos parágrafos de alguns artigos são mais técnicos e, por isto, aparecem entre colchetes. Alguns dos artigos estão intimamente ligados à primeira parte, à qual eles acrescentam alguns exemplos e comentários mais específicos. Outros artigos vão além do objetivo da primeira parte e explicam os seus fundamentos. Há um artigo-chave sobre HEURÍSTICA MODERNA, que descreve a conexão existente entre os principais artigos e o plano em que se baseia o Dicionário, além de conter instruções para a procura de informações relativas a pontos específicos da lista. É preciso frisar que há um plano básico e uma certa unidade no Dicionário, porque os seus artigos aparentam uma grande variedade. Há alguns artigos mais

longos dedicados à discussão sistemática, embora condensada, de alguns temas mais gerais. Certos artigos contêm comentários mais específicos e outros tratam de reminiscências, dados históricos, citações, aforismas ou, até mesmo, anedotas.

O Dicionário não deverá ser lido muito depressa, pois o texto está muitas vezes condensado e é, aqui e ali, um pouco sutil. O leitor poderá recorrer ao Dicionário para obter informação sobre temas gerais. Se o assunto procurado surgir da experiência com seus próprios problemas ou dos de seus alunos, a leitura terá muito maior probabilidade de ser proveitosa.

A quarta parte é intitulada "Problemas, Indicações, Soluções". Nela são propostos alguns problemas ao leitor mais interessado. Cada "problema" é seguido (a uma distância apropriada) por uma "indicação" que pode revelar o caminho para chegar ao resultado, que está explicado na "solução".

Mencionamos, repetidamente, o "aluno" ou o "estudante", e o "professor", e a eles voltamos muitas e muitas vezes. É bom observar que o "estudante" tanto poderá ser um aluno de curso secundário ou superior como qualquer pessoa que esteja estudando Matemática. Da mesma maneira, o "professor" poderá ser secundário ou universitário, ou qualquer pessoa interessada na técnica do ensino da Matemática. O autor encara a situação umas vezes sob o ponto de vista do aluno e outras, do professor (o último caso é preponderante na primeira parte). No entanto, na maior parte das vezes, o ponto de vista é o de alguém que não é nem professor nem aluno, mas deseja resolver o problema que se lhe apresenta.

Parte 1

Em Aula

OBJETIVO

1. **Auxílio ao estudante.** Um dos mais importantes deveres do professor é o de auxiliar os seus alunos, o que não é fácil, pois exige tempo, prática, dedicação e princípios firmes.

O estudante deve adquirir tanta experiência pelo trabalho independente quanto lhe for possível. Mas se ele for deixado sozinho, sem ajuda ou com auxílio insuficiente, é possível que não experimente qualquer progresso. Se o professor ajudar demais, nada restará para o aluno fazer. O professor deve auxiliar, nem demais nem de menos, mas de tal modo que ao estudante caiba uma *parcela razoável do trabalho*.

Se o aluno não for capaz de fazer muita coisa, o mestre deverá deixar-lhe pelo menos alguma ilusão de trabalho independente. Para isto, deve auxiliá-lo discretamente, *sem dar na vista*.

O melhor é, porém, ajudar o estudante com naturalidade. O professor deve colocar-se no lugar do aluno, perceber o ponto de vista deste, procurar compreender o que se passa em sua cabeça e fazer uma pergunta ou indicar um passo que *poderia ter ocorrido ao próprio estudante*.

2. **Questões, recomendações, operações mentais.** Ao procurar realmente ajudar o aluno, com discrição e naturalidade, o professor é repetidamente levado a fazer as mesmas perguntas e a indicar os mesmos passos. Assim, em inúmeros problemas, temos de indagar: *Qual é a incógnita?* Podemos variar as palavras e indagar a mesma coisa de muitas maneiras diferentes: Do que é que se precisa? O que é que se quer? O que é que se deve procurar? A finalidade destas indagações é focalizar a atenção do aluno na incógnita. Algumas vezes, obtém-se o mesmo efeito de maneira mais natural, com uma sugestão: *Considere a incógnita!* A indagação e a sugestão visam ao mesmo objetivo: ambas tendem a provocar a mesma operação mental.

Pareceu ao Autor que valeria a pena coligir e agrupar indagações e sugestões típicas, úteis para discutir os problemas com os alunos. A lista que aqui estudamos contém indagações e sugestões deste tipo, cuidadosamente selecionadas e dispostas. Elas são igualmente úteis àquele que procura resolver problemas por si próprio. Se o leitor ficar suficientemente familiarizado com essa lista e conseguir perceber, por detrás da sugestão, a ação sugerida, ele verá que a lista enumera, indiretamente, *operações mentais típicas, úteis para a resolução de problemas*. Estas operações estão relacionadas na ordem em que é mais provável que ocorram.

3. **Generalidade.** É uma importante característica das indagações e sugestões que constituem a nossa lista. Tomem-se as indagações: *Qual é a incógnita? Quais são os dados? Qual é a condicionante?* Elas são de aplicação geral, podemos fazê-las com sucesso ao tratarmos de problemas de qualquer tipo. A sua utilização não está restrita a nenhum assunto em particular. O nosso problema pode ser algébrico ou geométrico, matemático ou não, um problema científico importante ou um mero enigma. Não há diferença, as indagações fazem sentido e podem auxiliar-nos a resolver o problema.

Há, de fato, uma **restrição**, mas que nada tem a ver com o assunto da matéria. Algumas indagações e sugestões da lista são aplicáveis apenas a "problemas de determinação" e não a "problemas de demonstração". Ver PROBLEMAS DE DETERMINAÇÃO, PROBLEMAS DE DEMONSTRAÇÃO.

4. **Bom senso.** As indagações e sugestões da nossa lista são genéricas mas, exceto quanto à sua generalidade, são naturais, simples, óbvias e se originam do bom senso comum: Tome-se a sugestão: *Considere a incógnita! E procure pensar num problema conhecido que tenha a mesma incógnita ou outra semelhante.* Ela aconselha a fazer aquilo que seria feito de qualquer maneira, sem nenhum conselho, por quem estivesse realmente interessado no seu problema. Está com fome? Deseja então conseguir comida e pensa em meios conhecidos de obtê-la. O seu problema é de Geometria? Deseja então traçar um triângulo e pensa em processos conhecidos de fazê-lo. Tem um problema qualquer? Deseja então encontrar uma certa incógnita e pensa em maneiras conhecidas de encontrar essa ou outra incógnita semelhante. Se fizer isto, estará seguindo exatamente a sugestão que citamos em nossa lista. E estará assim no caminho certo, pois a sugestão é boa e indica um procedimento que freqüentemente apresenta bons resultados.

Todas as indagações e sugestões da nossa lista são naturais, simples, óbvias, apenas o bom senso comum, mas elas formulam este bom senso em termos gerais. Elas indicam uma certa conduta que se apresenta naturalmente a qualquer um que esteja realmente interessado em seu problema e tenha alguma dose de bom senso. Mas aquele que procede de maneira certa geralmente não se preocupa em exprimir o seu procedimento em termos claros, ou possivelmente é incapaz de fazê-lo. A nossa lista procura assim expressar tal fato.

5. **Professor e aluno. Imitação e prática.** Há dois objetivos que o professor pode ter em vista ao dirigir a seus alunos uma indagação ou uma sugestão da lista: primeiro, auxiliá-lo a resolver o problema que lhe é apresentado; segundo, desenvolver no estudante a capacidade de resolver futuros problemas por si próprio.

A experiência mostra que as indagações e sugestões da nossa lista, se usadas de modo adequado, muito freqüentemente ajudam o estudante. Elas têm em comum duas características: bom senso e generalidade. Como se originam no bom senso comum, muitas vezes surgem naturalmente. Elas bem poderiam ter ocorrido ao próprio

aluno. Por serem genéricas, auxiliam discretamente: apenas indicam a direção geral, deixando muito para o estudante fazer.

Mas os dois objetivos mencionados estão intimamente ligados: se o aluno conseguir resolver o problema que lhe é apresentado, terá acrescentado alguma coisa à sua capacidade de resolver problemas. Não devemos, então, esquecer de que as nossas indagações são genéricas, aplicáveis a muitos casos. Se a mesma indagação for proveitosamente repetida, dificilmente o estudante deixará de notá-la e será induzido a formular, ele próprio, essa indagação em situação semelhante. Pela repetição da indagação, poderá chegar à idéia certa. Com tal sucesso, ele descobrirá a maneira correta de utilizar a indagação e assim a terá realmente assimilado.

O estudante poderá assimilar tão bem algumas das questões de nossa lista que finalmente será capaz de apresentá-la a si próprio no momento apropriado e de realizar, natural e vigorosamente, a operação mental correspondente. Quando tal acontece, o estudante extrai o maior proveito possível da lista. O que poderá o professor fazer para obter este melhor resultado possível?

A resolução de problemas é uma habilitação prática como, digamos, o é a natação. Adquirimos qualquer habilitação por imitação e prática. Ao tentarmos nadar, imitamos o que os outros fazem com as mãos e os pés para manterem suas cabeças fora d'água e, afinal, aprendemos a nadar pela prática da natação. Ao tentarmos resolver problemas, temos de observar e imitar o que fazem outras pessoas quando resolvem os seus e, por fim, aprendemos a resolver problemas, resolvendo-os.

O professor que deseja desenvolver nos estudantes a capacidade de resolver problemas deve incutir em suas mentes algum interesse por problemas e proporcionar-lhes muitas oportunidades de imitar e de praticar. Quando o professor tenciona desenvolver nos seus alunos as operações mentais correspondentes às indagações e sugestões da nossa lista, ele as apresenta tantas vezes quanto o puder fazer com naturalidade. Além disso, quando o professor resolve um problema em aula, deve dramatizar um pouco as suas idéias e fazer a si próprio as mesmas indagações que utiliza para ajudar os alunos. Graças a esta orientação, o estudante acabará por descobrir o uso correto das indagações e sugestões e, ao fazê-lo, adquirirá algo mais importante do que o simples conhecimento de um fato matemático qualquer.

DIVISÕES PRINCIPAIS, QUESTÕES PRINCIPAIS

6. **As quatro fases.** Ao procurarmos a solução, podemos variar continuamente o nosso ponto de vista, a nossa maneira de encarar o problema. Temos de mudar de posição de quando em quando. É provável que a nossa concepção do problema seja muito incompleta no princípio; a nossa perspectiva é outra depois de feito algum progresso; ela é ainda mais diferente quando estamos quase a chegar à solução.

Para agrupar convenientemente as indagações e sugestões da nossa lista, distinguiremos quatro fases de trabalho. Primeiro, temos de *compreender* o problema,

temos de perceber claramente o que é necessário. Segundo, temos de ver como os diversos itens estão inter-relacionados, como a incógnita está ligada aos dados, para termos a idéia da resolução, para estabelecermos um *plano*. Terceiro, *executamos* o nosso plano. Quarto, fazemos um *retrospecto* da resolução completa, revendo-a e discutindo-a.

Cada uma destas fases tem a sua importância. Pode acontecer que a um estudante ocorra uma excepcional idéia brilhante e, saltando por sobre todas as preparações, ele chegue impulsivamente à solução. Estas idéias felizes são, evidentemente, muito desejáveis, mas alguma coisa muito inconveniente e *desastrosa* pode resultar se o estudante deixar de lado qualquer uma das quatro fases sem dela ter uma perfeita noção. Acontecerá o pior se o estudante atirar-se a fazer cálculos e a traçar figuras sem ter *compreendido* o problema. É geralmente inútil executar detalhes sem perceber a conexão principal ou sem ter feito uma espécie de *plano*. Muitos enganos podem ser evitados se, na execução do seu plano, o estudante *verificar cada passo*. Muitos dos melhores efeitos podem ficar perdidos se ele deixar de reexaminar e de *reconsiderar* a solução completa.

7. Compreensão do problema. É uma tolice responder a uma pergunta que não tenha sido compreendida. É triste trabalhar para um fim que não se deseja. Estas coisas tolas e tristes fazem-se muitas vezes, mas cabe ao professor evitar que elas ocorram nas suas aulas. O aluno precisa compreender o problema, mas não só isto: deve também *desejar* resolvê-lo. Se lhe faltar compreensão e interesse, isto nem sempre será culpa sua. O problema deve ser bem escolhido, nem muito difícil nem muito fácil, natural e interessante, e um certo tempo deve ser dedicado à sua apresentação natural e interessante.

Primeiro que tudo, o enunciado verbal do problema precisa ficar bem entendido. O aluno deve também estar em condições de identificar as partes principais do problema, a incógnita, os dados, a condicionante. Daí porque, raramente, pode o professor dispensar as indagações: *Qual é a incógnita? Quais são os dados? Qual é a condicionante?*

O estudante deve considerar as partes principais do problema, atenta e repetidamente, sob vários pontos de vista. Se houver uma figura relacionada ao problema, deverá *traçar uma figura* e nela indicar a incógnita e os dados. Se for necessário designar estes elementos, deverá *adotar uma notação adequada*, pois, dedicando alguma atenção à escolha dos signos apropriados, será obrigado a considerar os elementos para os quais esses signos têm de ser escolhidos. Há uma outra indagação que pode ser útil neste estágio preparatório, desde que não se espere para ela uma resposta definitiva e sim uma provisória, uma suposição: *É possível satisfazer a condicionante?*

(Na exposição da Parte 2, a "Compreensão do Problema" está subdividida em dois estágios: "Familiarização" e "Aperfeiçoamento da compreensão".)

8. **Exemplo.** Tomemos, para ilustrar alguns pontos tratados acima, o seguinte exemplo simples: *Calcular a diagonal de um paralelepípedo retângulo do qual são conhecidos o comprimento, a largura e a altura.*

Para discutir com proveito este problema, os estudantes precisam conhecer o teorema de Pitágoras e algumas das suas aplicações à Geometria Plana, mas basta-lhes um conhecimento sistemático muito superficial da Geometria Espacial. O professor pode aqui contar com uma pequena familiaridade dos alunos com as relações espaciais.

O professor pode tornar interessante o problema, concretizando-o. A sala de aulas é um paralelepípedo retângulo cujas dimensões podem ser medidas ou estimadas. Os alunos devem calcular, “medir indiretamente”, a diagonal da sala. O professor indica o comprimento, a largura e a altura da sala e, com um gesto, mostra a diagonal. Ele anima a figura que traçou no quadro-negro por contínuas referências à sala.

O diálogo entre o professor e seus alunos pode principiar da seguinte maneira:

— Qual é a incógnita?

— O comprimento da diagonal de um paralelepípedo.

— Quais são os dados?

— O comprimento, a largura e a altura do paralelepípedo.

— *Adote uma notação adequada.* Qual a letra que deve denotar a incógnita?

— x .

— Quais as letras que escolheria para o comprimento, a largura e a altura?

— a , b e c .

— Qual é a condicionante que relaciona a , b e c com x ?

— x é a diagonal do paralelepípedo no qual a , b e c são, respectivamente, o comprimento, a largura e a altura.

— Trata-se de um problema razoável? Ou seja, *a condicionante é suficiente para determinar a incógnita?*

— Sim, ele é razoável. Se conhecermos a , b e c , conheceremos o paralelepípedo. Se o paralelepípedo ficar determinado, a sua diagonal também o ficará.

9. **Estabelecimento de um plano.** Temos um plano quando conhecemos, pelo menos de um modo geral, quais as contas, os cálculos ou os desenhos que precisamos executar para obter a incógnita. O caminho que vai desde a compreensão do problema até o estabelecimento de um plano, pode ser longo e tortuoso. Realmente, o principal feito na resolução de um problema é a concepção da idéia de um plano. Esta idéia pode surgir gradualmente ou, então, após tentativas infrutíferas e um período de hesitação, aparecer repentinamente, num lampejo, como uma “idéia brilhante”. A melhor coisa que pode um professor fazer por seu aluno é propiciar-lhe, dis-

cretamente, uma idéia luminosa. As indagações e sugestões que passamos a discutir tendem a provocar tal idéia.

Para sentir a posição do estudante, o professor deve pensar na sua própria experiência, nas dificuldades e sucessos que ele mesmo encontrou ao resolver problemas.

Sabemos, naturalmente, que é difícil ter uma boa idéia se pouco conhecemos do assunto e que é impossível tê-la se dele nada soubermos. As boas idéias são baseadas na experiência passada e em conhecimentos previamente adquiridos. Para uma boa idéia, não basta a simples recordação, mas não podemos ter nenhuma idéia boa sem relembrar alguns fatos pertinentes. Não bastam os materiais para a construção de ma casa, mas não podemos construí-la sem lançar mão dos materiais necessários. Os materiais indispensáveis à resolução de um problema matemático são certos itens relevantes do conhecimento matemático já adquirido, tais como problemas anteriormente resolvidos e teoremas anteriormente demonstrados. Assim sendo, deve-se muitas vezes começar o trabalho pela indagação: *Conhece um problema correlato?*

A dificuldade está em que, geralmente, há problemas demais que estão, de uma maneira ou de outra, relacionados com o nosso, isto é, que têm com este algum ponto em comum. Como, então, escolher aquele, ou os poucos, que são realmente úteis? Há uma sugestão que vai diretamente a um ponto comum essencial: *Considere a incógnita! E procure pensar num problema conhecido que tenha a mesma incógnita ou outra semelhante.*

Se conseguirmos lembrar de um problema anteriormente resolvido que seja intimamente relacionado com o nosso, teremos tido muita sorte. Devemos fazer por merecer esta sorte e podemos merecê-la, aproveitando-a. *Eis um problema correlato já resolvido. É possível utilizá-lo?*

As indagações acima, se forem bem compreendidas e atentamente consideradas, muitas vezes contribuem para dar partida à correta seqüência de idéias, mas nem sempre conseguem ajudar, pois não podem fazer milagres. Se elas não funcionarem, precisaremos procurar, em torno, algum outro ponto de contato apropriado e examinar os diversos aspectos de nosso problema. Teremos de variar, de transformar, de modificá-lo. *É possível reformular o problema?* Algumas das indagações da nossa lista indicam meios específicos de VARIAÇÃO DO PROBLEMA, tais como a GENERALIZAÇÃO, a PARTICULARIZAÇÃO, o recurso à ANALOGIA, o abandono de uma parte da condicionante e outros. Os detalhes são importantes, mas não podemos examiná-los agora. A variação do problema pode levar a um PROBLEMA AUXILIAR adequado: *Se não conseguir resolver o problema, procure antes resolver um problema correlato.*

Ao tentarmos aplicar vários problemas ou teoremas conhecidos, cogitando de diversas modificações e ensaiando problemas auxiliares diferentes, podemos distanciar-nos tanto do nosso problema original que correremos o risco de perdê-lo por completo. Há, no entanto, uma boa indagação que pode nos trazer de volta a ele: *Utilizou todos os dados? Utilizou toda a condicionante?*

10. **Exemplo.** Voltemos ao exemplo considerado na seção 8. Quando o deixamos, os alunos haviam acabado de compreender o problema e de mostrar por ele algum interesse. Eles poderiam ter agora algumas idéias próprias, alguma iniciativa. Se o professor, tendo observado atentamente, não notar qualquer sinal dessa iniciativa, terá de repetir cuidadosamente todo o seu diálogo com os estudantes. Ele deve estar preparado para apresentar de novo, com modificações, as indagações não respondidas. Deve também estar preparado para encontrar, muitas vezes, o silêncio desconcertante de seus alunos (o qual será abaixo indicado por reticências.....).

— *Conhece um problema correlato?*

—

— *Considere a incógnita! Conhece um problema que tenha a mesma incógnita ou outra semelhante?*

—

— *Então, qual é a incógnita?*

— A diagonal de um paralelepípedo.

— *Conhece algum problema que tenha a mesma incógnita?*

— Não. Ainda não resolvemos nenhum problema em que entrasse a diagonal de um paralelepípedo.

— *Conhece algum problema que tenha uma incógnita semelhante?*

—

— Repare, a diagonal é um segmento, um segmento de reta. Nunca resolveu um problema cuja incógnita fosse o comprimento de uma linha?

— Claro que já resolvemos desses problemas. Por exemplo, calcular um lado de um triângulo retângulo.

— *Está certo. Eis um problema correlato já resolvido. É possível utilizá-lo?*

—

— Teve sorte de se lembrar de um problema relacionado ao seu e que já resolveu antes. Não gostaria de utilizá-lo? *É possível introduzir algum elemento auxiliar para possibilitar a sua utilização?*

—

— Olhe aqui, o problema de que se lembrou refere-se a um triângulo. Há algum triângulo na sua figura?

Esperemos que esta última indicação seja bastante explícita para dar a idéia da solução, que é a introdução de um triângulo retângulo (destacado na figura 1), do qual a diagonal pedida é a hipotenusa. No entanto, o professor deve estar preparado para o caso em que até esta indicação tão explícita seja insuficiente para despertar os

alunos de seu torpor. Deve ainda preparar-se para usar toda uma gama de indicações mais ou menos explícitas.

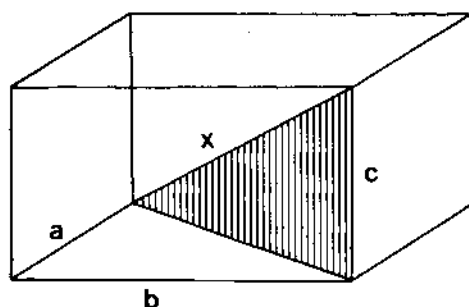


Figura 1

- Não gostaria de ter um triângulo na figura?
- Que tipo de triângulo gostaria de ter na figura?
- Não pode ainda calcular a diagonal, mas já disse que é capaz de calcular o lado de um triângulo. Então, o que fará agora?
- Poderia calcular a diagonal se ela fosse o lado de um triângulo?

Quando afinal, com ajuda maior ou menor, os estudantes conseguirem introduzir o elemento auxiliar decisivo, que é o triângulo retângulo em destaque na figura 1, o professor deverá estar convicto de que seus alunos vêem bastante adiante, antes de encorajá-los a passar aos cálculos.

– Acho que foi uma boa idéia traçar aquele triângulo. Agora tem um triângulo, mas a incógnita?

– A incógnita é a hipotenusa do triângulo. Podemos calculá-la pelo teorema de Pitágoras.

- Sim, se forem conhecidos os dois catetos. Mas não são?
- Um cateto é dado, é c . O outro, parece que não é difícil de achar. Sim, o outro cateto é a hipotenusa de um outro triângulo retângulo.
- Muito bem! Agora vejo que já tem um plano.

11. Execução do plano. Conceber um plano, a idéia da resolução, não é fácil. Para conseguir isto é preciso, além de conhecimentos anteriores, de bons hábitos mentais e de concentração no objetivo, mais uma coisa: boa sorte. Executar o plano é muito mais fácil; paciência é o de que mais se precisa.

O plano proporciona apenas um roteiro geral. Precisamos ficar convictos de que os detalhes inserem-se nesse roteiro e, para isto, temos de examiná-los, um após outro, pacientemente, até que tudo fique perfeitamente claro e que não reste nenhum recanto obscuro no qual possa ocultar-se um erro.

Se o aluno houver realmente concebido um plano, o professor terá então um período de relativa tranqüilidade. O maior risco é o de que o estudante esqueça o seu plano, o que pode facilmente ocorrer se ele recebeu o plano de fora e o aceitou por influência do professor. Mas se ele próprio houver preparado o plano, mesmo com alguma ajuda, e concebido com satisfação a idéia final, não perderá facilmente essa idéia. De qualquer maneira, o professor deve insistir para que o aluno *verifique cada passo*.

Podemos nos convencer "intuitivamente" ou "formalmente" da correção de um passo do nosso raciocínio. Podemos nos concentrar no ponto em questão até que o percebamos com tanta clareza e nitidez que não reste dúvida de que o passo é correto ou, então, podemos deduzi-lo de acordo com regras formais. (A diferença entre "intuição" e "raciocínio formal" é, em muitos casos importantes, bastante clara, porém podemos deixar a sua discussão para os filósofos.)

O principal é que o estudante fique honestamente convicto da correção de cada passo. Em certos casos, pode o professor realçar a diferença entre "perceber" e "demonstrar": *É possível perceber claramente que o passo está certo?* Mas pode também *demonstrar que o passo está certo?*

12. Exemplo. Retomemos o problema no ponto em que o deixamos, no final da seção 10. O aluno conseguiu, afinal, ter a idéia da resolução. Ele percebe o triângulo do qual a incógnita x é a hipotenusa e a altura dada c é um dos catetos; o outro cateto é a diagonal de uma face. Deve-se, possivelmente, insistir para que o estudante adote uma notação apropriada. Ele deve escolher y para denotar o outro cateto, que é a diagonal da face cujos lados são a e b . Assim conseguirá perceber com maior clareza a idéia da resolução, que consiste em introduzir um problema auxiliar cuja incógnita será y . Por fim, calculando um triângulo após outro, ele poderá chegar a (ver figura 1)

$$x^2 = y^2 + c^2$$

$$y^2 = a^2 + b^2$$

e daí, eliminando a incógnita auxiliar y ,

$$\begin{aligned} x^2 &= a^2 + b^2 + c^2 \\ x &= \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}. \end{aligned}$$

O professor não terá motivo de interromper o aluno se este executar corretamente as operações, a não ser, possivelmente, para alertá-lo de que deverá *verificar cada passo*. Assim, o professor pode argumentar:

— É possível *perceber claramente* que o triângulo de lados x , y e c é retângulo?

O estudante a isto poderá responder honestamente “Sim, é”, mas é possível que ele fique muito embaraçado se o professor, não contente com a convicção intuitiva do aluno, continuar a inquirir:

— Pode então *demonstrar* que o triângulo é retângulo?

Por isso, é melhor que o professor suprima esta indagação até que a turma tenha uma boa base de Geometria Espacial. Mesmo neste caso, há o risco de que a resposta a uma pergunta incidental se torne a dificuldade principal para a maioria dos alunos.

13. Retrospecto. Até mesmo alunos razoavelmente bons, uma vez chegados à solução do problema e escrita a demonstração, fecham os livros e passam a outro assunto. Assim fazendo, eles perdem uma fase importante e instrutiva do trabalho da resolução. Se fizerem um retrospecto da resolução completa, reconsiderando e re-examinando o resultado final e o caminho que levou até este, eles poderão consolidar o seu conhecimento e aperfeiçoar a sua capacidade de resolver problemas. Um bom professor precisa compreender e transmitir a seus alunos o conceito de que problema algum fica completamente esgotado. Resta sempre alguma coisa a fazer. Com estudo e aprofundamento, podemos melhorar qualquer resolução e, seja como for, é sempre possível aperfeiçoar a nossa compreensão da resolução.

A esta altura, o estudante cumpriu o seu plano. Ele escreveu a resolução, verificando cada passo. Assim, tem boas razões para crer que resolveu corretamente o seu problema. Apesar de tudo, é sempre possível haver erros, especialmente se o argumento for longo e trabalhoso. Daí, a conveniência de verificações. Em particular, se houver algum processo rápido e intuitivo para verificar, quer o resultado, quer o argumento, ele não deverá ser desprezado. *É possível verificar o resultado? É possível verificar o argumento?*

Para nos convencermos da presença ou da qualidade de um objeto, desejamos vê-lo e tocá-lo. Assim como preferimos perceber por meio de dois sentidos, preferimos nos convencer por duas demonstrações diferentes: *É possível chegar ao resultado por um caminho diferente?* É preferível, naturalmente, um argumento curto e intuitivo do que um outro longo e trabalhoso: *É possível percebê-lo num relance?*

Um dos primeiros deveres do professor é não dar aos seus alunos a impressão de que os problemas matemáticos têm pouca relação uns com os outros, de que nenhuma relação têm com qualquer outra coisa. Surge uma oportunidade natural de investigar as relações de um problema quando fazemos o retrospecto de sua resolução. Os estudantes acharão realmente interessante o retrospecto se eles houverem fei-

to um esforço honesto e ficarem conscientes de terem resolvido bem o problema. Neste caso, ficarão ansiosos para ver o que mais poderão conseguir com aquele esforço e como poderão, da próxima vez, fazer tão bem quanto desta. O professor deve encorajar os alunos a imaginar casos em que eles poderão outra vez utilizar o procedimento usado ou o resultado obtido. *É possível utilizar o resultado, ou o método, em algum outro problema?*

14. Exemplo. Na seção 12, os estudantes haviam finalmente chegado à solução: se as três arestas de um paralelepípedo retângulo, que se originam num mesmo vértice, são a , b e c , a diagonal será

$$\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

É possível verificar o resultado? O professor não pode esperar de um aluno inexperiente uma boa resposta a esta indagação. Os alunos devem, porém, aprender bem cedo que os problemas “literais” apresentam uma grande vantagem sobre os problemas puramente “numéricos”: se o problema for literal ele se prestará a diversas verificações, as quais não podem ser aplicadas a um problema numérico. O nosso exemplo, embora bem simples, é suficiente para mostrar esta propriedade. O professor pode apresentar várias indagações a que os alunos facilmente responderão com “Sim”, mas um “Não” revelará uma séria falha no resultado.

— *Utilizou todos os dados?* Todos os dados aparecem na sua fórmula que exprime a diagonal?

— O comprimento, a largura e a altura desempenham funções no nosso problema; este é simétrico em relação a a , b e c . A expressão obtida para a diagonal será simétrica em relação a a , b , c ? Ela permanecerá inalterada quando a , b e c forem permutados entre si?

— O nosso problema é da Geometria Espacial: calcular a diagonal de um paralelepípedo de dimensões dadas a , b e c . Ele é análogo a outro problema da Geometria Plana: calcular a diagonal de um retângulo de dimensões dadas, a e b . O resultado do nosso problema “espacial” será análogo ao resultado do problema “plano”?

— Se a altura c decrescer até se anular, o paralelepípedo transformar-se-á num paralelogramo. Se fizer $c = 0$ na sua fórmula, obterá a fórmula correta para a diagonal de um paralelogramo retângulo?

— Se a altura c crescer, a diagonal também crescerá. A sua fórmula mostra isto?

— Se todas as três dimensões do paralelepípedo crescerem numa determinada proporção, a diagonal também crescerá nessa mesma proporção. Se, na sua fórmula, substituir a , b e c por $12a$, $12b$, $12c$, respectivamente, a expressão da diagonal, devido a essa substituição, também deverá ficar multiplicada por 12. Estará certo isto?

— Se a , b e c estiverem expressos em metros, a fórmula fornecerá a diagonal também em metros. Mas se mudar todas as medidas para centímetros, a fórmula deverá continuar válida. Estará certo isto?

(As duas últimas questões são essencialmente equivalentes; ver TESTE DIMENSIONAL.)

Estas indagações produzem diversos efeitos bons. Primeiro, um estudante inteligente não poderá deixar de impressionar-se pelo fato de que a fórmula passou em tantos testes. Ele já ficara convicto de estar certa a fórmula porque ele a deduzira cuidadosamente. Mas agora está ainda mais convencido disso e o aumento da confiança provém de outra origem: deve-se a uma espécie de "prova experimental". Então, graças às indagações precedentes, os detalhes da fórmula adquirem um novo significado e ficam ligados a vários fatos. A fórmula tem, portanto, melhor probabilidade de ficar lembrada, o conhecimento do estudante consolida-se. Finalmente, as indagações podem facilmente ser transferidas para problemas semelhantes. Após alguma experiência com problemas semelhantes, um estudante inteligente poderá perceber as idéias básicas gerais: a utilização dos dados relevantes, a variação dos dados, a simetria, a analogia. Se ele adquirir o hábito de dirigir sua atenção para estes pontos, a sua capacidade de resolver problemas poderá definitivamente beneficiar-se.

É possível verificar o argumento? Em casos difíceis e importantes, pode ser necessário verificar de novo o argumento, passo a passo. Geralmente, não basta tomar, para verificação, alguns pontos "sensíveis". No nosso caso, pode ser conveniente discutir retrospectivamente aquela questão que parecia a menos própria à discussão quando a solução ainda não havia sido alcançada: é possível *demonstrar* que o triângulo cujos lados são a , b e c é retângulo? (Ver o final da seção 12.)

É possível utilizar o resultado, ou o método, em algum outro problema? Com um pouco de incentivo e após um ou dois exemplos, os estudantes facilmente encontram aplicações que consistam, essencialmente, em dar alguma *interpretação concreta* aos elementos matemáticos abstratos do problema. O próprio professor deu uma interpretação concreta ao tomar a sala em que dava a aula como o paralelepípedo do problema. Um estudante medíocre pode propor, como aplicação, calcular a diagonal do restaurante em lugar da diagonal da sala de aulas. Se os alunos não aparecerem com observações mais imaginosas, o professor poderá apresentar o problema de forma ligeiramente diferente, como, por exemplo: "Sendo dados o comprimento, a largura e a altura de um paralelepípedo retângulo, calcular a distância do seu centro a um dos vértices".

Os estudantes podem utilizar o *resultado* do problema que acabaram de resolver, se observarem que a distância pedida é a metade da diagonal recentemente calculada. Ou então eles podem utilizar o *método*, introduzindo triângulos retângulos apropriados (esta última alternativa é menos óbvia e algo mais desajeitada para o caso presente).

Depois desta aplicação, o professor pode discutir a configuração das quatro diagonais do paralelepípedo e das seis pirâmides das quais as seis diagonais são as arestas. Quando a imaginação geométrica dos alunos estiver suficientemente avivada,

o professor deverá voltar à sua indagação: *É possível utilizar o resultado, ou o método, em algum outro problema?* Há agora maior probabilidade de que os alunos encontrem alguma interpretação concreta mais interessante, como, por exemplo, a seguinte:

“No centro da cobertura retangular de um edifício, que tem 21 metros de comprimento e 16 metros de largura, instala-se um mastro de 8 metros de altura. Para amarrar o mastro, precisamos de quatro cabos iguais. Estes partem do mesmo ponto, 2 metros abaixo do topo do mastro, e são fixados nos quatro cantos da cobertura do edifício. Qual será o comprimento de cada cabo?”

Os estudantes podem utilizar o *método* do problema que acabaram de resolver com detalhes, introduzindo um triângulo retângulo num plano vertical e um outro plano horizontal, ou, se não, podem utilizar o *resultado*, imaginando um paralelepípedo retângulo, do qual a diagonal x é um dos quatro cabos e as arestas são

$$a = 10,5 \qquad b = 8 \qquad c = 6.$$

Pela aplicação direta da fórmula, obtém-se $x = 14,5$.

Para outros exemplos, ver **É POSSÍVEL UTILIZAR O RESULTADO?**

15. Abordagens diversas. Voltemos, por um momento, ao problema considerado nas seções anteriores 8, 10, 12 e 14. O trabalho principal, que consistiu na descoberta de um plano, foi descrito na seção 10. Ele poderia ter seguido uma linha de raciocínio diferente, apresentando as seguintes indagações:

- *Conhece algum problema correlato?*
- *Conhece um problema análogo?*
- Como vê, o problema proposto é da Geometria Espacial. Poderia imaginar um problema análogo mais simples da Geometria Plana?
- Como vê, o problema proposto é relativo a uma figura no espaço e refere-se à diagonal de um paralelepípedo retângulo. Que problema relativo a uma figura no plano poderia ser análogo? Ele deverá referir-se à — diagonal — de — um paralelogramo —
- Retângulo.

Os estudantes, mesmo se forem muito vagarosos e indiferentes, e houverem sido incapazes de até aí fazer qualquer suposição, serão forçados a contribuir com pelo menos uma minúscula parte da idéia. Além disso, se os alunos forem assim tão lentos, o professor não deverá tomar o presente problema sem antes ter discutido, para preparar os alunos, o problema análogo relativo ao paralelogramo. Aí então ele poderá prosseguir da seguinte maneira:

- *Eis aqui um problema correlato já antes resolvido. É possível utilizá-lo?*

— *Deve-se introduzir algum elemento auxiliar para tornar possível a sua utilização?*

Por fim, o professor pode chegar a sugerir aos alunos a idéia desejada, que consiste em conceber a diagonal de um dado paralelepípedo como a diagonal de um paralelogramo apropriado, que precisa ser introduzido na figura (como a interseção de um paralelepípedo com um plano que passa por duas arestas opostas). A idéia é essencialmente a mesma que antes (seção 10), mas a abordagem é diferente. Na seção 10, o contato com o conhecimento de que dispunham os estudantes foi estabelecido por intermédio da incógnita: um problema resolvido antes, foi lembrado porque a sua incógnita era a mesma do problema proposto. Aqui, é a analogia que proporciona a idéia da resolução.

16. O método de questionar do professor, descrito nas seções anteriores, 8, 10, 12, 14, 15 consiste essencialmente nisto: começar por indagação ou sugestão genérica da nossa lista e, se necessário, descer gradualmente para outras mais específicas e concretas até chegar à que provoque a resposta na mente do estudante. Se for preciso auxiliar o aluno a aproveitar a sua idéia, deve-se começar de novo, se possível, por uma indagação ou sugestão genérica da lista e, se necessário, voltar a alguma mais específica e assim por diante.

Naturalmente, a nossa lista é apenas a primeira do gênero. Ela parece suficiente para a maioria dos casos, mas sem dúvida poderá ser aperfeiçoada. É importante, porém, que as sugestões iniciais sejam simples, naturais e genéricas, e que a lista seja curta.

As sugestões devem ser simples e naturais, porque do contrário elas não poderiam ser *discretas*.

As sugestões devem ser genéricas, aplicáveis não apenas ao problema presente, mas também a problemas de todos os tipos, pois só assim elas poderão desenvolver a *capacidade* do estudante e não somente uma técnica específica.

A lista deve ser curta, para que as questões possam ser frequentemente repetidas, sem artificialismo e em condições diferentes. Desse modo, é provável que elas sejam finalmente assimiladas pelo estudante e contribuam para o desenvolvimento de um *hábito mental*.

É necessário descer gradualmente a sugestões específicas, para que o aluno tenha uma *parcela do trabalho* tão grande quanto possível.

Este método de questionar não é rígido. E ainda bem, pois, nestes assuntos, qualquer procedimento rígido, mecânico, pedante, será forçosamente prejudicial. O nosso método permite uma certa elasticidade e variação, admite abordagens diversas (seção 15), pode e deve ser aplicado de tal maneira que as questões apresentadas pelo professor possam ter ocorrido ao *próprio aluno*.

Se o professor desejar experimentar, em aula, o método aqui proposto, deverá, evidentemente, proceder com cautela. Deverá estudar cuidadosamente o exemplo apresentado na seção 8 e aqueles que seguem nas seções 18, 19 e 20. Deverá preparar cuidadosamente os exemplos que pretende discutir, considerando também abordagens diversas. Deverá, ainda, começar por algumas tentativas e descobrir gradualmente como lhe será possível aplicar o método, como os estudantes o recebem e quanto tempo isso lhe tomará.

17. Questões boas e más. Quando o método de questionar acima formulado é bem compreendido, ele ajuda a avaliar, por comparação, a qualidade de certas sugestões que podem ser apresentadas na intenção de auxiliar os estudantes.

Voltemos à situação tal como ela se apresentava no início da seção 10, quando foi feita a indagação: *Conhece um problema correlato?* Em lugar desta, com a melhor das intenções de ajudar os alunos, pode ser que se apresente a questão: *É possível aplicar o teorema de Pitágoras?*

A intenção pode ser a melhor, mas a questão é das piores. Precisamos perceber em que situação foi ela apresentada, para em seguida ver por que há uma longa sequência de objeções contra esta espécie de "auxílio".

(1) Se o estudante estiver próximo da solução, ele entenderá a sugestão implícita na indagação; mas se não estiver, é muito provável que de modo algum perceba aonde se quer chegar com a questão. Assim, esta deixará de auxiliar no exato momento em que o auxílio mais se fizer necessário.

(2) Se a sugestão for compreendida, ela revelará todo o segredo, muito pouco restando para o estudante fazer.

(3) A sugestão é de natureza muito específica. Mesmo que o estudante a aproveite na resolução do presente problema, nada aprenderá para problemas futuros. A questão não é instrutiva.

(4) Mesmo que ele compreenda a sugestão, o estudante dificilmente perceberá como ocorreu ao professor apresentar tal questão. E como poderia ele, o estudante, chegar a esta questão por si próprio? Parece um passe de mágica, assim como tirar um coelho de um chapéu. A questão realmente nada tem de instrutiva.

Nenhuma destas objeções pode ser levantada contra o procedimento descrito na seção 10 e, novamente, na seção 15.

OUTROS EXEMPLOS

18. Um problema de traçado geométrico. *Inscriver um quadrado num triângulo dado. Dois vértices do quadrado devem situar-se sobre a base do triângulo e os dois outros vértices sobre os dois outros lados do triângulo, um em cada.*

Qual é a incógnita?

- Um quadrado.
 - *Quais são os dados?*
 - É dado um triângulo, nada mais.
 - *Qual é a condicionante?*
 - Os quatro vértices do quadrado devem situar-se sobre o perímetro do triângulo, dois deles sobre a base e um vértice em cada um dos dois outros lados.
 - *É possível satisfazer a condicionante?*
 - Acho que sim. Não tenho muita certeza.
 - Parece achar que o problema não é muito fácil. *Se não puder resolver o problema proposto, procure primeiro resolver algum problema correlato. É possível satisfazer uma parte da condicionante?*
 - Que quer dizer por parte da condicionante?
 - Como vê, a condicionante refere-se a todos os vértices do quadrado. Quantos vértices tem este?
 - Quatro.
 - Uma parte da condicionante seria relativa a menos de quatro vértices. *Mantenha apenas uma parte da condicionante, deixe a outra de lado.* Que parte da condicionante é fácil de satisfazer?
 - É fácil traçar um quadrado que tenha dois vértices sobre o perímetro – ou mesmo três vértices sobre o perímetro.
 - *Trace uma figura!*
- O aluno traça a figura 2.

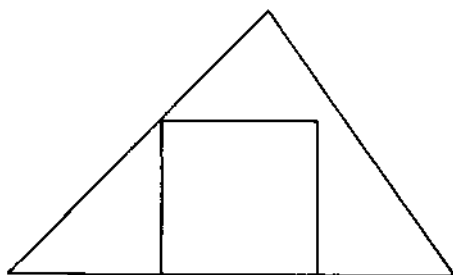


Figura 2

- *Manteve uma parte da condicionante e deixou a outra de lado. Até que ponto ficou a incógnita assim determinada?*

— O quadrado não ficará determinado se tiver apenas três vértices sobre o perímetro.

— Muito bem. *Trace uma figura!*

O aluno traça a figura 3.

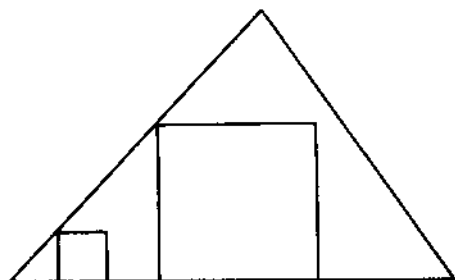


Figura 3

— Como disse, o quadrado não fica determinado pela *parte da condicionante que foi mantida. Como é que ele pode variar?*

—

— Três dos vértices do quadrado estão sobre o perímetro do triângulo, mas o quarto não está lá onde deveria ficar. O seu quadrado, como observou, está indeterminado, ele pode variar, assim como o seu quarto vértice. *Como é que pode variar?*

—

— Tente experimentalmente, se desejar. Trace outros quadrados com três vértices sobre o perímetro, da mesma maneira que traçou os dois quadrados já na figura. Trace quadrados grandes e pequenos. O que parece ser o lugar geométrico do quarto vértice? *Como é que ele pode variar?*

O professor levou o aluno até próximo da idéia da solução. Se este for capaz de perceber que o lugar geométrico do quarto vértice é uma reta, ele terá chegado à solução.

19. Um problema de demonstração. *Dois ângulos estão em planos diferentes, mas cada lado de um deles é paralelo ao lado correspondente do outro e está também na mesma direção. Demonstrar que os dois ângulos são iguais.*

O que temos a demonstrar é um teorema fundamental da Geometria Espacial. O problema pode ser submetido a estudantes que saibam a Geometria Plana e tenham conhecimento daquelas poucas noções da Geometria Espacial que servem de preparação para o presente teorema, nos Elementos de Euclides. (O teorema que enunciamos

e vamos demonstrar constitui a proposição 10 do Livro XI dos Elementos.) Não apenas aquelas indagações e sugestões extraídas da nossa lista estão impressas em *itálico*, mas também outras que a elas correspondem, assim como “problemas de demonstração” correspondem a “problemas de determinação”. (Esta correspondência é sistematicamente descrita em PROBLEMAS DE DETERMINAÇÃO, PROBLEMAS DE DEMONSTRAÇÃO, 5 e 6.)

– *Qual é a hipótese?*

– Dois ângulos estão em planos diferentes. Cada lado de um é paralelo ao lado correspondente do outro e tem também a mesma direção.

– *Qual é a conclusão?*

– Os dois ângulos são iguais.

– *Trace uma figura. Adote uma notação adequada.*

O aluno traça as linhas da figura 4 e escolhe, mais ou menos ajudado pelo professor, as letras que aparecem na figura.

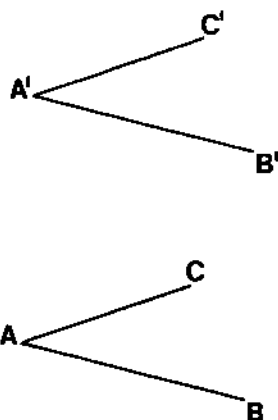


Figura 4

– *Qual é a hipótese?* Por favor, diga usando a sua notação.

– A, B, C não estão no mesmo plano que A', B', C' e $AB \parallel A'B', AC \parallel A'C'$. Além disso, AB tem a mesma direção de $A'B'$ e AC a mesma de $A'C'$.

– *Qual é a conclusão?*

– $\angle BAC = \angle B'A'C'$.

– *Considere a conclusão! E procure pensar num teorema que tenha a mesma conclusão ou outra semelhante.*

– Se dois triângulos forem congruentes, os ângulos correspondentes serão iguais.

— Muito bem! Eis um teorema correlato e já antes demonstrado. É possível utilizá-lo?

— Parece que sim, mas ainda não vejo bem como.

— É preciso introduzir algum elemento auxiliar para tornar possível a sua utilização?

—

— Bem, o teorema que tão bem citou é relativo a triângulos, refere-se a um par de triângulos congruentes. Há algum triângulo na sua figura?

— Não, mas posso traçar alguns. Deixe-me ligar B a C e B' a C' . Haverá então dois triângulos, $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$.

— Está certo. Mas para que servem esses triângulos?

— Para demonstrar a conclusão, $\angle BAC = \angle B'A'C'$.

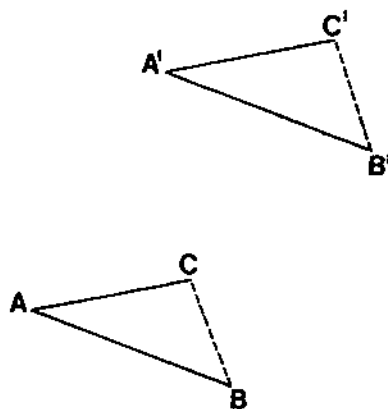


Figura 5

— Bem, se quer demonstrar isto, de que tipo de triângulos precisa?

— De triângulos congruentes. Está claro, posso escolher B , C , B' e C' de tal maneira que

$$AB = A'B', AC = A'C'.$$

— Muito bem! Que deseja agora demonstrar?

— Quero demonstrar que os triângulos são congruentes, que

$$\triangle ABC = \triangle A'B'C'.$$

Se conseguir demonstrar isto, daí se seguirá imediatamente a conclusão $LBAC = LB'A'C'$.

— Certo! Tem um novo objetivo, visa a uma nova conclusão. *Considere a conclusão! E procure pensar num teorema conhecido que tenha a mesma conclusão ou outra semelhante.*

— Dois triângulos são congruentes quando os três lados de um deles forem respectivamente iguais aos três lados do outro.

— Muito bem. Poderia ter escolhido um pior. Agora, *eis um teorema correlato e já antes demonstrado. É possível utilizá-lo?*

— Poderia utilizá-lo se soubesse que $BC = B'C'$.

— É isso mesmo. Portanto, o que é que procura?

— Demonstrar que $BC = B'C'$.

— *Procure pensar num teorema conhecido que tenha a mesma conclusão ou outra semelhante.*

— É, conheço um teorema que termina: "... então as duas linhas são iguais". Mas parece que ele não cabe aqui.

— *É preciso introduzir algum elemento auxiliar para tornar possível a sua utilização?*

—

— Repare, como poderia demonstrar que $BC = B'C'$, quando não há na figura uma relação entre BC e $B'C'$?

—

— *Utilizou a hipótese? Qua é a hipótese?*

— Admitimos que $AB \parallel A'B'$ e $AC \parallel A'C'$. Sim, é claro que terei de utilizar isto.

— *Utilizou toda a hipótese?* Diz que $AB \parallel A'B'$. Isto é tudo que sabe sobre estas linhas?

— Não. AB é também igual a $A'B'$, pelo traçado. Como também AC e $A'C'$ são iguais.

— Duas linhas paralelas do mesmo comprimento. É uma configuração interessante. *Já viu antes?*

— Sim! É claro! Paralelogramo! Deixe-me ligar A a A' , B a B' e C a C' .

— A idéia não é assim tão má. Quantos paralelogramos tem agora a sua figura?

— Dois. Não, três. Não, dois. Quero dizer, há dois que posso imediatamente demonstrar que são paralelogramos. Há um terceiro que parece ser um paralelogramo e espero demonstrar que o é. Com isso, a demonstração estará concluída.

Das respostas anteriores, poderíamos ter deduzido que o aluno é inteligente. Depois desta sua última observação, não resta mais dúvida.

Este estudante conseguiu perceber um resultado matemático e distinguir entre demonstração e suposição. Sabe também que as suposições podem ser mais ou menos plausíveis. Na verdade, ele aproveitou alguma coisa das suas aulas de Matemática. Ele tem uma certa experiência real de resolver problemas e pode conceber e aproveitar uma boa idéia.

20. Um problema de razão de variação. A água escoa para um vaso cilíndrico à razão r . O vaso tem a forma de um cone circular reto, de base horizontal, com o vértice para baixo; o raio da base é a e a altura do cone é b . Determinar a razão à qual o nível da água sobe quando a profundidade for y . Em seguida, calcular o valor numérico da incógnita, sabendo-se que $a = 4$ m, $b = 3$ m, $r = 2$ m³ por minuto e $y = 1$ m.

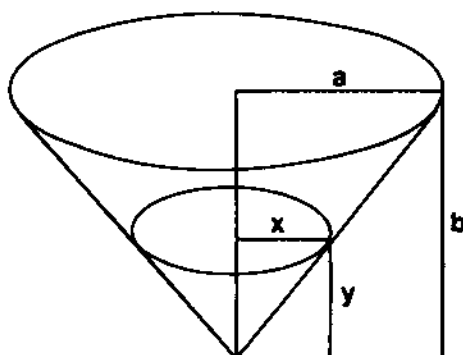


Figura 6

Admite-se que os alunos conheçam as mais simples regras de diferenciação e a noção de "razão de variação".

— Quais são os dados?

— O raio da base do cone $a = 4$ m; a altura do cone $b = 3$ m; a razão à qual a água escoa para o vaso $r = 2$ m³ por minuto e a profundidade da água num certo momento $y = 1$ m.

— Certo. O enunciado do problema sugere que, provisoriamente, se deve desprezar os valores numéricos; trabalhar com as letras; expressar a incógnita em função de a , b , r e y e só no final, depois de chegar à expressão literal da incógnita, substituir as letras pelos valores numéricos. Eu seguiria esta sugestão. Agora, qual é a incógnita?

- A razão à qual a superfície da água sobe quando a profundidade é y .
- Como? Poderia repetir em outras palavras?
- A razão de variação da profundidade da água é aumentada.

– Está certo, a razão de variação de y . Mas o que é razão de variação? *Volte às definições.*

- A derivada é a razão de variação.
- Correto. Ora, y é uma função? Como dissemos, desprezamos o valor numérico de y . É possível imaginar como y varia?
- Sim, y , a profundidade, aumenta com o decorrer do tempo.
- Portanto, y é uma função de quê?
- Do tempo t .
- Muito bem. *Adote uma notação adequada.* Como poderia escrever a “razão de variação de y ” em símbolos matemáticos?

$$- \frac{dy}{dt}.$$

– Certo. Assim, esta é a sua incógnita. É preciso expressá-la em função de a , b , r e y . A propósito, um destes dados é uma razão. Qual deles?

- r é a razão à qual a água escoar para o vaso.
- Como é isso? *Pode dizê-lo em outras palavras?*
- r é a razão de variação do volume de água no vaso.
- Como? *É possível formulá-lo de uma outra maneira?* Como representaria isso numa notação adequada?

$$- r = \frac{dV}{dt}.$$

- O que é V ?
- O volume de água no vaso no instante t .
- Muito bem. Agora, tem de expressar $\frac{dy}{dt}$ em função de a , b , $\frac{dV}{dt}$ e y . Como faria isto?

–

– *Se não puder resolver o problema proposto, procure antes resolver algum problema correlato.* Se não perceber ainda a relação que existe entre $\frac{dy}{dt}$ e os dados,

procure introduzir alguma conexão mais simples que possa servir de intermediária. Como fazer isto?

—

— Não percebeu que há outras relações? Por exemplo, serão y e V independentes uma do outro?

— Não. Quando y cresce, V também cresce.

— Portanto, há uma relação. Qual é?

— Bem, V é o volume de um cone cuja altura é y . Mas não sei ainda qual é o raio da base.

— Não obstante, pode tomá-lo em consideração. Chame-o de alguma coisa, digamos x .

$$— V = \frac{\pi x^2 y}{3}.$$

— Certo. Agora, quanto a x . Independe de y ?

— Não. Quando a profundidade y da água cresce, o raio da superfície livre, x , também cresce.

— Portanto, há uma relação entre eles. Qual é?

— É claro, triângulos semelhantes.

$$x : y = a : b.$$

— Está vendo? Mais uma relação. Eu não gostaria de deixar de aproveitá-la. Não se esqueça de que procura conhecer a relação entre V e y .

— Tenho

$$x = \frac{ay}{b}$$

$$V = \frac{\pi a^2 y^3}{3b^2}.$$

— Muito bem. Isto não parece um bom elemento auxiliar? Mas não deve esquecer o seu objetivo. Qual é a incógnita?

— Bem, $\frac{dy}{dt}$

— Precisa encontrar uma relação entre $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dV}{dt}$ e as outras grandezas. E já aqui tem uma entre y , V e outras quantidades. O que fazer?

– Diferenciar! Está claro!

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi a^2 y^2}{b^2} \frac{dy}{dt}.$$

Eis tudo aí.

– Ótimo. E quanto aos valores numéricos?

– Se $a = 4$; $b = 3$; $\frac{dV}{dt} = r = 2$; $y = 1$, então

$$2 = \frac{\pi \times 16 \times 1}{9} \frac{dy}{dt}.$$

Parte 2

Como Resolver Um Problema

— Um Diálogo —

Familiarização

Por onde começar? Comece pelo enunciado do problema.

Que posso fazer? Visualize o problema como um todo, com tanta clareza e nitidez quanto possível.

Qual a vantagem em assim proceder? É preciso compreender o problema, familiarizar-se com ele, gravar na mente o seu objetivo. A atenção concedida ao problema pode também estimular a memória e propiciar a recordação de pontos relevantes.

Aperfeiçoamento da Compreensão

Por onde começar? Comece de novo pelo enunciado do problema, quando este estiver tão claro e tão bem gravado em sua mente que poderá até perdê-lo de vista por um momento sem temor de perdê-lo por completo.

Que posso fazer? Isole as partes principais de seu problema. A hipótese e a conclusão são as partes principais de um "problema de demonstração"; a incógnita, os dados e a condicionante são as partes principais de um "problema de determinação". Verifique as partes principais do seu problema, considere-as uma a uma, em seguida examine-as em várias combinações, relacionando cada detalhe com os outros detalhes e cada um destes com a totalidade do problema.

Qual a vantagem em assim proceder? Deve-se preparar e clarificar os detalhes que mais tarde terão uma função a desempenhar.

Procura da Idéia Proveitosa

Por onde começar? Comece pelo exame das partes principais de seu problema, quando estas estiverem nitidamente dispostas e claramente concebidas, graças ao seu trabalho anterior, e quando a sua memória estiver receptiva.

Que posso fazer? Considere o problema sob diversos pontos de vista e procure contatos com seus conhecimentos previamente adquiridos.

Considere o seu problema por diferentes lados. Destaque as diferentes partes, examine os diversos detalhes, examine repetidamente os mesmos detalhes, mas de maneir-

ras diferentes, combine-os diferentemente, aborde-os por diversos lados. Procure perceber algum significado novo em cada detalhe, alguma nova interpretação do conjunto.

Procure contatos com os seus conhecimentos anteriormente adquiridos. Tente pensar naquilo que já serviu de auxílio em situações semelhantes. Tente reconhecer alguma coisa de familiar no que examina e perceber algo de útil naquilo que reconhecer.

Que posso perceber? Uma idéia proveitosa, talvez a idéia decisiva que indique, num relance, o caminho para chegar ao fim desejado.

Como pode uma idéia ser proveitosa? Ela lhe mostra todo o caminho ou parte dele; ela lhe sugere, com maior ou menor nitidez, como prosseguir. As idéias são mais ou menos completas. Já é uma sorte ter uma idéia qualquer.

Que posso fazer com uma idéia incompleta? Deve levá-la em consideração. Se parecer vantajosa, deve examiná-la mais demoradamente. Se parecer confiável, deve verificar até onde ela o leva a reconsiderar a situação. Esta se modificou graças à sua idéia proveitosa. Examine a nova situação por diversos lados e procure contatos com seus conhecimentos anteriormente adquiridos.

Qual a vantagem em tornar a fazer isso? É possível que tenha sorte e lhe surja uma idéia. Talvez a sua próxima idéia o leve diretamente à resolução. Talvez precise ainda de mais algumas idéias proveitosas depois da próxima. Algumas delas talvez o levem por outro caminho. Não obstante, deve ser grato a todas as idéias novas, até às mais insignificantes, às nebulosas, às suplementares, que emprestam precisão às nebulosas ou tentam corrigir as menos felizes. Mesmo que, por algum tempo, não lhe ocorra qualquer nova idéia apreciável, deverá ficar agradecido se a sua concepção do problema tornar-se mais completa ou mais coerente, mais homogênea ou mais equilibrada.

Execução do Plano

Por onde começar? Comece da idéia feliz que o levou à resolução. Princípie quando se sentir seguro de que dominou a conexão principal e confiante em que pode proporcionar os detalhes menores que faltam.

Que posso fazer? Assegure o seu domínio. Realize detalhadamente todas as operações algébricas e geométricas que já verificou serem viáveis. Verifique a correção de cada passo, pelo raciocínio formal ou pela intuição, ou de ambas as maneiras. Se o seu problema é muito complexo, pode distinguir passos “grandes” e “pequenos”, constituindo-se cada grande passo de diversos pequenos. Verifique primeiro os grandes e passe depois para os pequenos.

Qual a vantagem em assim proceder? Uma apresentação da resolução, na qual cada passo está correto fora de qualquer dúvida.

Retrospecto

Por onde começar? Pela resolução, completa e correta em todos os seus detalhes.

Que posso fazer? Considere a resolução por diversos lados e busque contatos com seus conhecimentos adquiridos.

Considere os detalhes da resolução e procure torná-los tão simples quanto possível; examine as partes mais amplas da resolução e procure abreviá-las; tente perceber toda a resolução num relance. Procure modificar vantajosamente as partes maiores e menores da resolução, melhorá-la toda e inseri-la tão naturalmente quanto for possível, nos seus conhecimentos anteriormente adquiridos. Examine o método que o levou à resolução, para caracterizá-lo e utilizá-lo em outros problemas. Examine o resultado e procure utilizá-lo em outros problemas.

Qual a vantagem em assim proceder? É possível que encontre uma outra resolução melhor, que descubra fatos novos e interessantes. De qualquer maneira, se adquirir o hábito de verificar e examinar desse modo as suas resoluções, obterá alguns conhecimentos bem ordenados e prontos a serem utilizados e assim desenvolverá a sua capacidade de resolver problemas.

Parte 3

Pequeno Dicionário de Heurística

Analogia é uma espécie de semelhança. Objetos semelhantes coincidem uns com os outros em algum aspecto; objetos análogos *coincidem em certas relações* das suas respectivas partes.

1. Um paralelogramo retângulo é análogo a um paralelepípedo retângulo. Com efeito, as relações entre os lados do paralelogramo são semelhantes às que existem entre as faces do paralelepípedo:

Cada lado do paralelogramo é paralelo a apenas um outro lado e é perpendicular aos demais.

Cada face do paralelepípedo é paralela a apenas uma outra face e é perpendicular às demais.

Convenhamos em chamar cada lado um "elemento-limite" do paralelogramo e cada face um "elemento-limite" do paralelepípedo. Podemos, então, fundir os dois enunciados num único, que se aplica igualmente a ambas as figuras geométricas:

Cada elemento-limite é paralelo a apenas um outro elemento-limite e é perpendicular aos demais.

Temos, assim, expressado certas relações que são comuns aos dois sistemas de objetos comparados, lados de um retângulo e faces de um paralelepípedo retângulo. A analogia dos dois sistemas consiste nesta identidade de relações.

2. A analogia permeia todo o nosso pensamento, a nossa fala cotidiana e as nossas conclusões triviais, assim como os modos de expressão artística e as mais elevadas conclusões científicas. Ela é empregada nos mais diferentes níveis. É comum o uso de analogias vagas, incompletas ou obscuras, porém a analogia pode alçar-se ao nível do rigor matemático. Todos os tipos de analogia podem desempenhar uma função na descoberta da solução e, por isso, não devemos desprezar nenhum deles.

3. Podemos nos considerar felizes quando, ao tentarmos resolver um problema, conseguimos descobrir *um problema análogo mais simples*. Na seção 15, o nosso problema original era relativo à diagonal do paralelepípedo retângulo. A consideração de um problema mais simples, relativo à diagonal do retângulo levou à resolução do problema original. Passemos a discutir um outro caso do mesmo tipo. Temos a resolver o seguinte problema:

Determinar o centro da gravidade de um tetraedro homogêneo.

Sem conhecer o Cálculo Integral e com poucos conhecimentos de Física, esta

questão não é, de modo algum, fácil e constituía um sério problema científico nos dias de Arquimedes e de Galileu. Assim, se desejarmos resolvê-la com um mínimo de conhecimentos preliminares, deveremos sair à procura de uma questão análoga mais simples. O problema correspondente no plano ocorre-nos aqui naturalmente:

Determinar o centro de gravidade de um triângulo homogêneo.

Temos agora duas questões no lugar de uma. Mas é mais fácil responder a duas indagações do que a uma só, desde que ambas estejam inteligentemente correlacionadas.

4. Deixando de lado, no momento, o nosso problema original, relativo ao tetraedro, concentramo-nos no problema mais simples, referente ao triângulo. Para resolver este último, temos de saber alguma coisa a respeito de centros de gravidade. O princípio seguinte é plausível e surge naturalmente.

Se um sistema de massas S é composto de partes, tendo, todas elas, os seus centros de gravidade no mesmo plano, este plano contém também o centro de gravidade de todo o sistema S .

Este princípio proporciona tudo de que necessitamos no caso do triângulo. Primeiro, ele implica em que o centro de gravidade fique no plano do triângulo. Em seguida, podemos considerar o plano como composto de fibras (estreitas faixas, paralelogramos "infinitamente estreitos"), paralelas a um determinado lado do triângulo (a lado AB na figura 7). O centro de gravidade de cada fibra (ou de cada paralelogramo) é, evidentemente, o seu ponto médio e todos esses pontos médios ficam sobre a linha que liga o vértice C , oposto ao lado AB , ao meio M de AB (ver figura 7).

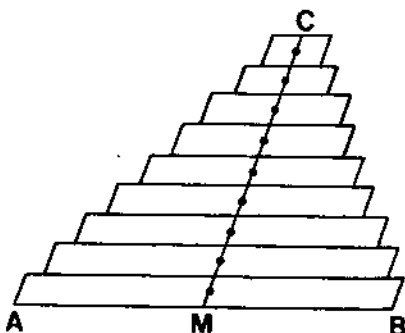


Figura 7

Qualquer plano que passe pela mediana CM do triângulo contém os centros de gravidade de todas as fibras paralelas que constituem o triângulo. Somos, assim, levados a concluir que o centro de gravidade do triângulo todo está na mesma media-

na. Como ele tem de estar também nas outras medianas, deverá ser o *ponto de interseção comum a todas as três medianas*.

É conveniente verificar, por considerações puramente geométricas, independentes de qualquer suposição mecânica, que as três medianas se encontram num mesmo ponto.

5. Após o caso do triângulo, o do tetraedro torna-se relativamente fácil. Acabamos de resolver um problema análogo ao problema proposto e, com isto, temos um *modelo a seguir*.

Para a resolução do problema análogo, que passamos a utilizar como modelo, concebemos o triângulo como composto de fibras paralelas a um dos seus lados, AB . Ora, podemos conceber o tetraedro $ABCD$ como composto de fibras paralelas a uma das suas arestas, AB .

Os pontos médios das fibras que constituem o triângulo ficam todos sobre a mesma reta, uma mediana do triângulo, que liga o meio M do lado AB ao vértice oposto C . Os pontos médios das fibras que constituem o tetraedro ficam todos no mesmo plano, que liga o meio M da aresta AB à aresta oposta CD (ver figura 8). Podemos chamar este plano MCD de *um plano mediano do tetraedro*.

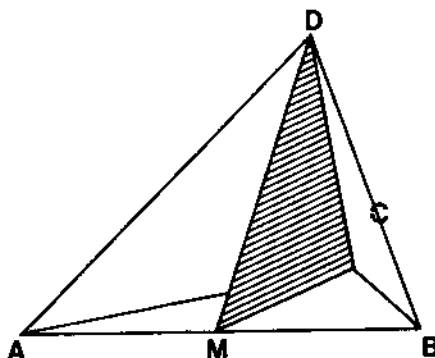


Figura 8

No caso do triângulo, tínhamos três medianas como MC , cada uma das quais tinha de conter o centro de gravidade do triângulo. Portanto, estas três medianas têm de encontrar-se num ponto que é, precisamente, o centro de gravidade. No caso do tetraedro, temos seis planos medianos, como MCD , que ligam os pontos médios de alguma aresta à aresta oposta, cada um dos quais tem de conter o centro de gravidade do tetraedro. Portanto, estes seis planos medianos têm de encontrar-se num ponto que é, precisamente, o centro de gravidade.

6. Temos assim resolvido o problema do centro de gravidade do tetraedro homogêneo. Para completar, é conveniente verificar agora, por considerações pura-

mente geométricas, independentemente de suposições mecânicas, que os seis mencionados planos medianos passam por um mesmo ponto.

Quando da resolução do problema do centro de gravidade do triângulo homogêneo, achamos conveniente verificar, para completar, que as três medianas do triângulo passavam pelo mesmo ponto. Este problema é análogo ao outro, porém evidentemente mais simples.

Podemos de novo utilizar, para resolver o problema relativo ao tetraedro, o problema análogo mais simples referente ao triângulo (que podemos aqui supor já resolvido). Com efeito, considerem-se os três planos medianos, que passam pelas três arestas DA , DB , DC e que se originam no vértice D . Todos eles passam também pelo ponto médio da aresta oposta (o plano mediano passa por DC passam também por M , ver figura 8). Ora, estes três planos medianos interceptam o ΔABC nas três medianas deste triângulo. Estas três passam pelo mesmo ponto (isto resulta do problema análogo mais simples) e este ponto, assim como D , é comum aos três planos medianos. A reta que liga os dois pontos é comum a todos os três planos medianos.

Demonstramos que estes três, dentre os seis, planos medianos que passam pelo vértice D têm uma reta comum. O mesmo deve ser verdade para os três planos medianos que passam por A , e também para os três que passam por B e para os três que passam por C . Relacionando convenientemente estes fatos, podemos demonstrar que os seis planos medianos têm um ponto em comum. (Os três planos que passam pelos lados do ΔABC determinam um ponto comum e três linhas que se encontram num ponto comum. Ora, pelo que acabamos de demonstrar, por cada linha de interseção deve passar mais um plano mediano).

7. Tanto no item 5 como no 6, utilizamos um problema análogo mais simples, relativo ao triângulo, para resolver o problema referente ao tetraedro. No entanto, os dois casos diferem num aspecto importante. No item 5, utilizamos o *método* do problema análogo mais simples, cuja resolução seguimos passo a passo. No item 6, utilizamos o *resultado* do problema análogo, sem nos preocuparmos como tal resultado foi obtido. Algumas vezes é possível utilizar ambos, o *método* e o *resultado* do problema análogo mais simples. Até mesmo o exemplo precedente mostrará isso se tomarmos as considerações dos itens 5 e 6 como sendo partes diferentes da resolução de um mesmo problema.

O nosso exemplo é típico. Ao resolvermos um problema proposto, podemos muitas vezes utilizar a resolução de um problema análogo mais simples: pode nos ser possível utilizar o seu método, o seu resultado ou ambos. Naturalmente, em casos mais difíceis, podem surgir complicações que não foram ainda mostradas no nosso exemplo. Em particular, pode ocorrer que a resolução do problema análogo não possa ser imediatamente utilizada ao nosso problema original. Neste caso, pode valer a pena reconsiderar a resolução, variá-la e modificá-la até que, depois de serem tentadas

diversas formas de resolução, encontremos finalmente uma, suscetível de aplicação ao nosso problema original.

8. É desejável prever o resultado ou, pelo menos, alguns aspectos do resultado, com um certo grau de plausibilidade. Essas previsões plausíveis são, muitas vezes, baseadas na analogia.

Assim, podemos saber que o centro de gravidade de um triângulo coincide com o centro de gravidade dos seus três vértices (isto é, de três pontos materiais de massas iguais, situados nos três vértices do triângulo). Sabendo disto, podemos conjecturar que o centro de gravidade do tetraedro coincide com o centro de gravidade dos seus quatro vértices.

Esta conjectura constitui uma "inferência por analogia". Sabendo que o triângulo e o tetraedro assemelham-se em muitos aspectos, conjecturamos que eles se assemelham em mais um aspecto. Seria tolice considerar a plausibilidade de tais conjecturas como certeza, mas tolice igual, ou até maior, seria desprezar conjecturas tão plausíveis.

A inferência por analogia parece ser o tipo mais comum de conclusão e é o essencial. Proporciona conjecturas mais ou menos plausíveis que podem ou não ser confirmadas pela experiência e pelo raciocínio mais rigoroso. Um historiador, ao estudar a influência das mais famosas personalidades do passado sobre a nossa civilização, chega a conclusões por analogia. Mas isto também o fez uma criança que, ao ouvir mencionado um personagem histórico, perguntou:

- Quem é Napoleão?
- Foi um grande general.
- De que tamanho ele era?

9. Uma conclusão analógica extraída de muitos casos paralelos é mais forte do que uma outra proveniente de casos menos numerosos. Não obstante, a qualidade é aqui mais importante do que a quantidade. Analogias evidentes pesam mais do que vagas similitudes, exemplos sistematicamente dispostos têm maior valor do que coleções aleatórias de casos.

No item 8, apresentamos uma conjectura sobre o centro de gravidade do tetraedro. Essa conjectura apoiava-se na analogia, pois o caso do tetraedro é análogo ao do triângulo. Podemos reforçá-la pelo exame de mais um caso análogo, aquele de uma barra homogênea (isto é, de um segmento de reta de densidade uniforme).

A analogia entre

segmento

triângulo

tetraedro

apresenta muitos aspectos. Um segmento situa-se numa reta, um triângulo num plano e um tetraedro no espaço. Os segmentos de reta são as mais simples figuras unidi-

mencionais limitadas, os triângulos os mais simples polígonos e os tetraedros os mais simples poliedros.

O segmento tem 2 elementos-limite adimensionais (dois pontos extremos) e o seu interior é unidimensional.

O triângulo tem 3 elementos-limite adimensionais e 3 unidimensionais (3 vértices e 3 lados) e o seu interior é bidimensional.

O tetraedro tem 4 elementos-limite adimensionais, 6 unidimensionais e 4 bidimensionais (4 vértices, 6 arestas e 4 faces) e o seu interior é tridimensional.

Estes números podem ser dispostos numa tabela. As colunas sucessivas contêm os números de elementos a_, uni_, bi_ e tridimensionais, as linhas sucessivas, os números para o segmento, o triângulo e o tetraedro:

2	1		
3	3	1	
4	6	4	1

Basta um pouco de familiarização com as potências do binômio para reconhecer nesta tabela uma seção do triângulo de Pascal. Encontramos uma notável regularidade no segmento, no triângulo e no tetraedro.

10. Se tivermos verificado que os objetivos que comparamos são intimamente relacionados, as "inferências por analogia", como as que seguem, poderão ter para nós um certo valor.

O centro de gravidade de uma barra homogênea coincide com o centro de gravidade dos seus 2 pontos extremos, o centro de gravidade de um triângulo homogêneo coincide com o centro de gravidade dos seus 3 vértices. Não seria de suspeitar que o centro de gravidade do tetraedro homogêneo coincidisse com o centro de gravidade dos seus 4 vértices?

Repetindo, o centro de gravidade de uma barra homogênea divide a distância entre os seus pontos extremos na proporção 1 : 1. O centro de gravidade de um triângulo divide a distância entre qualquer vértice e o ponto médio do lado oposto na proporção de 2 : 1. Não seria de suspeitar que o centro de um tetraedro homogêneo dividisse a distância entre qualquer vértice e o centro de gravidade da face oposta na proporção de 3 : 1?

Parece extremamente improvável que as conjecturas sugeridas por estas questões sejam errôneas, que uma regularidade tão bela seja destruída. O sentimento de que a ordem harmoniosa simples não pode ser ilusória orienta o descobridor, tanto na Matemática como nas outras ciências, e está expresso no provérbio latino: *simplex sigillum veri* (a simplicidade é o segredo da verdade).

[O que se vem de expor sugere uma extensão para n dimensões. Parece improvável que o que é verdadeiro para as três primeiras dimensões, para $n = 1, 2, 3$,

cesse de o ser para valores maiores de n . Esta conjectura é uma “inferência por indução” e mostra que a indução baseia-se naturalmente na analogia. Ver INDUÇÃO E INDUÇÃO MATEMÁTICA. }

[11. Concluiremos o presente artigo com algumas breves considerações sobre os mais importantes casos em que a analogia atinge o rigor das idéias matemáticas.

(I) Dois sistemas de elementos matemáticos, sejam eles S e S' , estão ligados de tal maneira que as relações entre os elementos de S são regidas pelas mesmas leis que regem as relações entre os elementos de S' .

Este tipo de analogia entre S e S' é exemplificado por aquilo que acabamos de expor no item 1, sejam S os lados do retângulo e S' as faces do paralelepípedo retângulo.

(II) Há uma correspondência unívoca entre os elementos dos dois sistemas S e S' , conservando certas relações. Isto é, se uma relação existir entre os elementos de um dos sistemas, a mesma relação existirá entre os elementos do outro sistema. Uma tal ligação entre dois sistemas é um tipo muito rigoroso de analogia e se chama isomorfismo (ou isomorfismo holoédrico).

(III) Há uma correspondência plurívoca entre os objetos dos dois sistemas S e S' , conservando certas relações. Uma tal ligação (que é importante em muitos ramos da Matemática avançada, especialmente na Teoria dos Grupos, e não precisa ser aqui discutida em detalhe) chama-se isomorfismo meroédrico (ou homomorfismo, se bem que homomorfismo fosse talvez um termo melhor). O isomorfismo meroédrico pode ser também considerado um tipo muito rigoroso de analogia.]

Bolzano, Bernard (1781–1844), lógico e matemático, dedicou grande parte de sua vasta obra sobre Lógica, *Wissenschaftslehre*, a questão da Heurística (vol. 3, págs. 293-295). Assim escreveu ele: “Não me julgo, de maneira alguma, capaz de apresentar aqui qualquer processo de investigação que não tenha sido já há muito tempo percebido por todos os homens de talento e de forma alguma prometo que o leitor encontrará aqui qualquer completa novidade neste assunto. Farei, no entanto, todo o possível para formular, em linguagem clara, as regras e os meios de investigação que são observados por todos os homens capazes, os quais, na maioria das vezes, não têm sequer consciência de as estarem seguindo. Embora não mantenha a ilusão de conseguir plenamente nem mesmo isso, ainda tenho a esperança de que o pouco aqui apresentado possa agradar a alguém e encontrar mais tarde alguma aplicação”.

Condicionante é uma das partes principais de um “problema de determinação”. Ver PROBLEMAS DE DETERMINAÇÃO, PROBLEMAS DE DEMONSTRAÇÃO, 3. Ver também TERMOS, ANTIGOS E NOVOS, 2.

Uma condicionante é chamada *redundante* quando contém partes supérfluas. É dita *contraditória* quando as suas partes são reciprocamente opostas e incompatíveis, de tal maneira que ela não possa ser satisfeita.

Assim, se uma condicionante for expressa por um número de equações lineares maior que o de incógnitas, ela será redundante ou contraditória. Se for expressa por equações em número menor que o de incógnitas, ela será insuficiente para determinar as incógnitas. Se a condicionante for expressa pelo mesmo número de equações e de incógnitas, ela será, em geral, exatamente suficiente, mas poderá também ser, em casos excepcionais, contraditória ou insuficiente.

Conheça um problema correlato? É difícil imaginar um problema absolutamente novo, sem qualquer semelhança ou relação com qualquer outro que já haja sido resolvido; se um tal problema pudesse existir, ele seria insolúvel. De fato, ao resolver um problema, sempre aproveitamos algum problema anteriormente resolvido, usando o seu resultado, ou o seu método, ou a experiência adquirida ao resolvê-lo. Além do que, naturalmente, o problema de que nos aproveitamos deve ser, de alguma maneira, relacionado com o nosso problema atual. Daí a pergunta: *Conhece um problema correlato?*

Não há, de modo geral, nenhuma dificuldade em lembrar de um problema que já foi resolvido e que seja mais ou menos relacionado com o que se apresenta. Pelo contrário, é possível que encontremos um excesso de tais problemas e que a dificuldade esteja em escolher um que nos seja útil. Temos de procurar problemas intimamente correlatos; CONSIDERE A INCÓGNITA ou procure um outro problema que já haja sido resolvido e que esteja relacionado ao problema que se apresenta por GENERALIZAÇÃO, PARTICULARIZAÇÃO ou ANALOGIA.

A indagação aqui tratada visa à mobilização do conhecimento anteriormente adquirido (PROGRESSO E CONSECUÇÃO, 1). Uma parte de nosso conhecimento matemático está guardado sob a forma de teoremas demonstrados anteriormente. Daí a pergunta: *Conhece um teorema que possa ser útil?* Esta indagação pode ser particularmente apropriada quando se trata de um "problema de demonstração", isto é, quando temos a demonstrar, ou a refutar, um teorema.

Considere a incógnita. Este é um velho conselho. Corresponde ao ditado latino *respice finem*, isto é, olhe para o fim. Lembre-se do seu objetivo. Não esqueça a sua meta. Pense naquilo que deseja obter. Não perca de vista o que é necessário. Tenha em mente aquilo para que está a trabalhar. *Considere a incógnita. Considere a conclusão.* Estas duas últimas versões do *respice finem* estão especificamente adaptadas aos problemas matemáticos, a "problemas de determinação" e a "problemas de demonstração", respectivamente.

Ao focalizar a atenção e concentrar a vontade no nosso objetivo, pensamos em meios e maneiras de alcançá-lo. Quais são os meios para este fim? Como podemos chegar a ele? Como podemos obter um resultado deste tipo? Que causas poderiam produzir este resultado? Onde já viu aparecer um tal problema? O que geralmente se

faz para obter este resultado? *E procure pensar num problema conhecido que tenha a mesma incógnita ou outra semelhante. E procure pensar num teorema conhecido que tenha a mesma conclusão ou outra semelhante.* Aqui também as duas últimas versões estão especificamente adaptadas aos problemas matemáticos, a “problemas de determinação” e a “problemas de demonstração”.

1. Vamos tratar agora de problemas matemáticos, “problemas de determinação”, e da sugestão: *Procure pensar num problema conhecido que tenha a mesma incógnita ou outra semelhante.* Comparemos esta sugestão com aquela outra implicada na indagação: *Conhece um problema correlato?*

Esta última é mais genérica do que a primeira. Se um problema pode ser relacionado a um outro, é porque os dois têm alguma coisa em comum. Eles podem envolver alguns elementos ou noções comuns, ou ter em comum alguns dados ou alguma parte da condicionante e assim por diante. A nossa primeira sugestão insiste num ponto comum particular: os dois problemas devem ter a mesma incógnita. Isto é, a incógnita deve ser a mesma em ambos os casos, por exemplo, o comprimento de uma linha reta.

Em comparação com a pergunta genérica, há uma certa economia na sugestão específica.

Primeiro, podemos poupar algum esforço na representação do problema, pois não precisamos, de imediato, considerar o problema inteiro, mas somente a incógnita. O problema assim nos aparece, esquematicamente:

“Dados calcular o comprimento da linha.”

Segundo, há uma certa economia de escolha. Múltiplos problemas podem estar relacionados com o problema proposto, por terem um ou outro ponto em comum com ele. Mas, ao considerarmos a incógnita, restringimos a nossa escolha, pois somente levamos em conta aqueles problemas que têm a mesma incógnita. Além disso, dentre os problemas que têm a mesma incógnita, consideramos primeiro aqueles mais elementares e que nos são familiares.

2. O problema se nos apresenta sob a forma:

“Dados calcular o comprimento da linha.”

Os problemas deste tipo mais simples e mais conhecidos são relativos a triângulos: dadas três partes constituintes de um triângulo, calcular o comprimento de um lado. Ao nos lembrarmos disto, encontramos algo de possível relevância: *Éis um problema correlato que já foi antes resolvido. É possível utilizá-lo? É possível utilizar seu resultado?* Para utilizar resultados conhecidos relativos a triângulos, precisamos ter um deles. Há algum triângulo? Ou devemos introduzir um, para tirar proveito desses resultados conhecidos? *Deve-se introduzir algum elemento auxiliar para possibilitar sua utilização?*

Há diversos problemas simples cuja incógnita é o lado de um triângulo. (Eles diferem pelos dados; podem ser dados dois ângulos e um lado ou dois lados e um ângulo, podendo a posição do ângulo com referência aos lados dados ser diferente. Em particular, todos estes problemas se tornam ainda mais simples no caso dos triângulos retângulos). Com a atenção concentrada no problema que defrontamos, podemos tentar descobrir que tipo de triângulo devemos introduzir, que problema já antes resolvido (e que tenha a mesma incógnita do nosso problema) é possível adaptar convenientemente aos nossos fins.

Uma vez introduzido um triângulo auxiliar adequado, pode acontecer que ainda não conheçamos três das partes constitutivas do mesmo. Isto não é, porém, absolutamente indispensável: se prevemos que as partes faltantes podem, de alguma maneira, ser obtidas, teremos feito um progresso essencial, pois dispomos então de um plano.

3. O procedimento descrito nos itens 2 e 3 está exemplificado na seção 10, embora a ilustração tenha ficado algo obscurecida pela lentidão dos alunos. Não é de modo algum difícil acrescentar outros exemplos semelhantes. De fato, a resolução de quase todos os "problemas de determinação" que geralmente são apresentados às turmas menos adiantadas poderiam começar pela utilização apropriada da sugestão: *Procure pensar num problema conhecido que tenha a mesma incógnita ou outra semelhante.*

Devemos encarar tais problemas esquematicamente e considerar, em primeiro lugar, a incógnita:

- (1) Dados calcular o comprimento da linha.
- (2) Dados calcular o ângulo.
- (3) Dados calcular o volume do tetraedro.
- (4) Dados determinar o ponto.

Se tivermos alguma experiência no trato de problemas matemáticos elementares, lembramos prontamente algum problema simples e conhecido ou, então, problemas que tenham a mesma incógnita. Se o problema proposto não for um daqueles simples problemas conhecidos, tentaremos naturalmente utilizar aquilo que nos for conhecido e aproveitar o resultado daqueles problemas simples. Tentaremos introduzir alguma coisa bem conhecida no problema e, assim fazendo, começaremos bem.

Em cada um dos quatro casos acima mencionados há um plano óbvio, uma suposição plausível para a futura linha de ação.

(1) A solução deverá ser determinada como um lado de um triângulo. Só faltará introduzir um triângulo apropriado, com três partes constitutivas conhecidas, ou fáceis de determinar.

(2) A solução deverá ser determinada como um ângulo de um triângulo. Só faltará introduzir um triângulo apropriado.

(3) A solução poderá ser determinada se forem conhecidas a área da base e a altura. Só faltará calcular a área do lado e a respectiva altura.

(4) A solução deverá ser determinada como o ponto de interseção de dois lugares geométricos, cada um dos quais é um círculo ou uma reta. Só faltará desentranhar esses lugares geométricos da condicionante imposta.

Em todos esses casos, o plano fica sugerido por um problema simples que tem a mesma incógnita e pelo desejo de utilizar o seu resultado ou o seu método. Podemos, naturalmente, encontrar dificuldades na execução de um tal plano, mas temos uma idéia de como começar, o que já é uma grande vantagem.

4. Vantagem dessa natureza não haverá se não houver um problema, já anteriormente resolvido, que tenha a mesma incógnita do problema proposto. Em casos tais, torna-se muito mais difícil enfrentar este problema.

“Calcular a área da superfície de uma esfera de raio dado.” Este problema foi resolvido por Arquimedes. Dificilmente será encontrado um problema mais simples com a mesma incógnita e certamente não havia um que Arquimedes pudesse ter utilizado. Na realidade, a solução de Arquimedes pode ser considerada um dos mais notáveis feitos matemáticos.

“Calcular a área da superfície da esfera inscrita num tetraedro cujas seis arestas são dadas.” Se conhecermos a solução de Arquimedes não precisaremos do seu gênio para resolver este problema: bastará exprimir o raio da esfera inscrita em função das seis arestas do tetraedro. Isto pode não ser exatamente fácil, mas a dificuldade não se compara com aquela do problema de Arquimedes.

A diferença entre um problema fácil e outro difícil pode estar em conhecer-se ou não um outro problema já anteriormente resolvido, que tenha a mesma incógnita.

5. Quando Arquimedes encontrou a área da superfície da esfera, ele não conhecia, como já mencionamos, nenhum problema já resolvido que tivesse a mesma incógnita. Mas ele conhecia vários outros problemas já anteriormente resolvidos, cujas incógnitas eram semelhantes. Há superfícies curvas cujas áreas são mais fáceis de calcular que a da esfera e que eram bem conhecidas na época de Arquimedes, tais como as superfícies laterais de cilindros retos circulares, de cones retos circulares e de troncos destes cones. Podemos estar certos de que Arquimedes examinou cuidadosamente estes casos similares mais simples. De fato, para a sua resolução, ele utilizou, como aproximação da esfera, um sólido composto, constituído de dois cones e de diversos troncos de cones (ver DEFINIÇÕES, 6).

Se não conseguirmos encontrar um problema que já tenha sido resolvido, cuja incógnita seja a mesma do problema que se nos apresenta, procuramos encontrar outro que tenha uma incógnita semelhante à deste. Problemas deste último tipo são menos intimamente relacionados com o nosso problema do que aqueles antes mencionados e, portanto, de um modo geral, menos fáceis de utilizar para os nossos fins, mas de qualquer maneira eles podem servir como preciosos guias.

6. Acrescentaremos algumas observações referentes a “problemas de demonstração”, análogas aos comentários anteriores, mais extensos, relativos aos “problemas de determinação”.

Temos a demonstrar (ou a refutar) um teorema claramente enunciado. Qualquer teorema, já antes demonstrado, que seja, de qualquer maneira, relacionado ao que nos é agora apresentado tem uma possibilidade de nos ser de alguma utilidade. Sabendo disso, *consideramos a conclusão*, isto é, destacamos a conclusão do nosso teorema. Um modo de encarar o teorema pode ser assim esquematicamente enunciado:

“Se. então os ângulos serão iguais.”

Concentramos a atenção sobre a conclusão apresentada e procuramos *pensar num teorema semelhante que tenha a mesma conclusão, ou outra semelhante*. Em particular, procuramos pensar em teoremas deste tipo que sejam muito simples e de nosso conhecimento.

No caso apresentado, há vários teoremas do mesmo tipo e podemos lembrar do seguinte: “Se dois triângulos forem congruentes, então os ângulos serão iguais.” *Eis um teorema correlato que já foi antes demonstrado. Procure pensar num teorema semelhante que tenha a mesma conclusão ou outra semelhante.*

Seguindo estas sugestões e procurando avaliar o auxílio proporcionado pelo teorema relembrado, podemos conceber um plano: procuremos demonstrar a igualdade dos ângulos em questão a partir dos triângulos congruentes. Vemos, então, a necessidade de introduzir um par de triângulos que contenham esses ângulos e de demonstrar que eles são congruentes. Um tal plano constitui certamente um bom ponto de partida e nos pode levar finalmente à conclusão, como na seção 19.

7. Para resumir: relembRANDO problemas já anteriormente resolvidos e que tenham a mesma incógnita ou outra semelhante (teoremas já anteriormente demonstrados e que tenham a mesma conclusão ou outra semelhante), teremos uma boa possibilidade de começar na direção certa e poderemos conceber um plano de resolução. Nos casos simples, que são os mais freqüentes nas turmas menos adiantadas, os problemas elementares com a mesma incógnita (teoremas com a mesma conclusão) são geralmente suficientes. A tentativa de relembRAR problemas que tenham a mesma incógnita constitui um recurso óbvio e sensato (comparar com o que ficou dito a este respeito na seção 4). É surpreendente que um recurso tão simples e útil não seja mais conhecido. O autor está inclinado a pensar que ele não tenha sequer sido até agora formulado em toda a sua generalidade. De qualquer maneira, não é lícito nem a estudantes nem a professores de Matemática desprezar a utilização apropriada da sugestão: *Considere a incógnita! E procure pensar num problema conhecido que tenha a mesma incógnita ou outra semelhante.*

Contradição. Ver CONDICIONANTE.

Corolário é um teorema que se demonstra facilmente pelo exame de outro teorema que se acaba de demonstrar. A palavra é de origem grega e a sua tradução mais literal seria “galardão”, ou “recompensa”.

Decomposição e recombinação constituem importantes operações mentais.

Examina-se um objeto que desperta o interesse ou provoca a curiosidade: a casa que se pretende alugar, um telegrama importante mas obscuro, qualquer objeto cujas finalidades e origem intrigam, ou qualquer problema que se queira resolver. Tem-se uma impressão do objeto como um todo, mas esta impressão possivelmente não é bastante definida. Um detalhe sobressai e sobre ele se focaliza a atenção. Em seguida, concentra-se num outro detalhe, depois ainda num outro. Diversas combinações de detalhes podem apresentar-se e, um pouco depois, considera-se novamente o objeto como um todo, mas agora ele é visto de maneira diferente. Decompõe-se o todo em suas partes e recombina-se as partes num todo mais ou menos diferente.

1. Quem entra em detalhes corre o risco de neles se perder. As particularidades muito numerosas ou muito minuciosas constituem uma sobrecarga mental. Podem impedir que se dê a devida atenção ao ponto principal, ou mesmo que se perceba este ponto. É bom lembrar do homem que não podia ver a floresta por causa das árvores.

Naturalmente, não desejamos perder tempo com detalhes desnecessários e devemos reservar o nosso esforço para o que for essencial. A dificuldade está em que não podemos dizer de antemão quais os detalhes que se revelarão, finalmente, úteis e quais os que não o serão.

Portanto, procuremos, antes de tudo, compreender o problema como um todo. Uma vez compreendido, estamos em melhor posição para avaliar que pontos particulares podem ser os mais essenciais. Tendo examinado um ou dois pontos essenciais, ficamos em melhor posição para julgar quais os outros detalhes que merecem exame mais atento. Passamos aos detalhes e decomponemos gradualmente o problema, mas não além do que se faz necessário.

Como é natural, o professor não pode esperar que todos os alunos procedam judiciosamente a este respeito. Pelo contrário, muitos estudantes têm o tolo e mau hábito de principiar a mexer nos detalhes antes de terem compreendido o problema como um todo.

2. Consideremos problemas matemáticos, “problemas de determinação”.

Uma vez compreendido todo o problema, o seu objetivo, o seu ponto principal, desejamos entrar nos detalhes. Por onde começar? Quase sempre, é razoável principiar pela consideração das partes principais, que são a incógnita, os dados e a condicionante. Em quase todos os casos, é aconselhável começar o exame detalhado do problema pelas indagações: *Qual é a incógnita? Quais são os dados? Qual é a condicionante?*

Se desejarmos examinar outros detalhes, que deveremos fazer? Muitas vezes, é aconselhável examinar os dados um a um, *separar as diversas partes da condicionante* e examiná-las uma a uma.

Se o nosso problema é mais difícil, é possível que tenhamos de decompô-lo ainda mais e de examinar detalhes ainda mais remotos. Desse modo, pode ser necessário *voltar à definição* de um certo termo, introduzir novos elementos constantes da definição e examinar os elementos assim introduzidos.

3. Uma vez decomposto o problema, podemos tentar recombinar os seus elementos de maneira nova. Em particular, podemos tentar essa recombinação de modo a obtermos um problema novo e mais acessível, que possamos utilizar como um problema auxiliar.

As possibilidades de recombinação são, naturalmente, ilimitadas. Os problemas difíceis exigem combinações ocultas, excepcionais, originais, e o engenho do solucionador revela-se na originalidade da combinação. Há, porém, certos tipos de combinações úteis e relativamente simples, suficientes para os problemas menos complexos, que devemos conhecer bem e ensaiar primeiro, mesmo que depois sejamos obrigados a recorrer a meios menos óbvios.

Há uma classificação formal na qual as combinações mais comuns e mais úteis ficam claramente colocadas. No preparo de um novo problema, a partir do problema proposto, podemos

- (1) manter a incógnita e mudar o restante (os dados e a condicionante); ou
- (2) manter os dados e mudar o restante (a incógnita e a condicionante); ou
- (3) manter a incógnita e os dados.

Passamos a examinar estes casos.

Os casos (1) e (2) se superpõem. De fato, é possível manter a incógnita e os dados e transformar o problema apenas pela mudança da condicionante. Por exemplo, os dois problemas seguintes, embora claramente equivalentes, não são exatamente o mesmo:

Traçar um triângulo equilátero, sendo dado um lado,

Traçar um triângulo equiângulo, sendo dado um lado.

A diferença dos dois enunciados, que é insignificante neste exemplo, pode ser muito significativa em outros casos. Tais casos são mesmo importantes sob certos aspectos, mas a sua discussão aqui tomaria muito espaço. Comparar com a última observação de PROBLEMA AUXILIAR, 7.

4. *Manter a incógnita* e mudar os dados e a condicionante, para transformar o problema proposto, é muitas vezes útil. A sugestão CONSIDERE A INCÓGNITA visa a problemas que têm a mesma incógnita. Tentamos relembrar um outro problema, já antes resolvido, do mesmo tipo: *E procure pensar num problema conhecido que te-*

nha a mesma incógnita ou outra semelhante. Se não conseguimos lembrar um tal problema, procuremos inventá-lo: É possível imaginar outros dados apropriados para determinar a incógnita?

Um problema novo que seja mais intimamente relacionado com o problema proposto terá uma melhor possibilidade de ser útil. Portanto, mantendo a incógnita, procuramos manter também alguns dados e alguma parte da condicionante, mudando o mínimo possível, apenas um ou dois dados e uma parte da condicionante. Um bom método é aquele em que omitimos alguma coisa sem nada acrescentarmos: mantemos a incógnita, *mantemos somente uma parte da condicionante, deixamos a outra de lado*, mas não introduzimos nenhuma cláusula, nenhum dado. Exemplos e comentários sobre este caso são encontrados nos itens 7 e 8.

5. *Mantendo os dados*, podemos tentar introduzir uma nova incógnita, mais útil e mais acessível. Esta precisa ser obtida dos dados e temos em mente uma tal incógnita quando indagamos: É POSSÍVEL OBTER ALGO DE ÚTIL DOS DADOS?

Observemos que duas coisas são aqui desejáveis. Primeiro, a nova incógnita deve ser mais acessível, isto é, mais fácil de obter, a partir dos dados, do que a incógnita original. Segundo, a nova incógnita deve ser útil, isto é, deve ser, quando encontrada, capaz de prestar algum serviço efetivo na procura da incógnita original. Em suma, a nova incógnita deve ser uma espécie de *intermediário*. Uma pedra no meio de um riacho está mais próxima de mim do que a outra margem, a qual desejo chegar e, quando chegar à pedra, ela me terá auxiliado a alcançar a margem oposta.

A nova incógnita deve ser acessível e útil, as duas coisas, mas muitas vezes temos de nos contentar com menos. Se nada melhor aparecer, não será desarrazoado deduzir alguma coisa que tenha a possibilidade de ser útil, e seria também razoável tentar uma nova incógnita intimamente relacionada com a original, mesmo que no início esta não pareça especialmente acessível.

Por exemplo, se o nosso problema for o cálculo da diagonal de um paralelepípedo (como na seção 8), podemos introduzir a diagonal de uma das faces como nova incógnita. Podemos fazê-lo ou porque *sabemos* que se tivermos a diagonal de uma face poderemos assim obter a diagonal do sólido (como na seção 10), ou porque *percebemos* que aquela é fácil de calcular e suspeitamos que ela poderá ser útil no cálculo da diagonal do sólido. (Comparar com UTILIZOU TODOS OS DADOS?, 1).

Se o nosso problema for o traçado de um círculo, temos de determinar duas coisas: o centro e o raio; podemos dizer que o problema tem duas partes. Em certos casos, uma parte é mais acessível do que a outra e, portanto, em qualquer caso, podemos razoavelmente considerar por um momento esta possibilidade: *É possível resolver uma parte do problema?* Com esta indagação, ponderamos as chances: compen-sará concentrarmo-nos só no centro, ou só no raio, e escolher um ou outro como a nova incógnita? Indagações deste tipo são freqüentemente muito úteis em problemas

mais complexos ou mais avançados. A idéia muitas vezes consiste em tomar alguma parte mais acessível e essencial do problema.

6. *Trocando tanto a incógnita quanto os dados*, desviamos-nos mais do nosso rumo original do que nos casos anteriores. É natural que não gostemos disto, pois sentimos o risco de perder completamente o problema original. No entanto, podemos ser compelidos a tal, se mudanças menos radicais não houverem resultado em algo mais acessível e útil. Podemos ficar tentados a tanto nos afastar do nosso problema original, caso o novo problema tenha boas possibilidades de sucesso. *É possível mudar a incógnita, ou os dados, ou todos eles, se necessário, de modo a que a nova incógnita e os novos dados fiquem mais próximos entre si?*

Uma maneira interessante de mudar tanto a incógnita como os dados é permutar a incógnita por um dos dados. (Ver É POSSÍVEL UTILIZAR O RESULTADO? 3).

7. *Exemplo.* Traçar um triângulo, sendo dados um lado a ; a altura h perpendicular a a e o ângulo α oposto a a .

Qual é a incógnita? Um triângulo.

Quais são os dados? Duas linhas, a e h , e o ângulo α .

Ora, se conhecemos alguma coisa de problemas de traçado geométrico, podemos reduzir este problema à determinação de um ponto. Traçamos a linha BC , igual ao lado a , após o que, tudo que temos a fazer é encontrar o vértice do triângulo, A , oposto a a (ver figura 9). Temos agora, de fato, um novo problema.

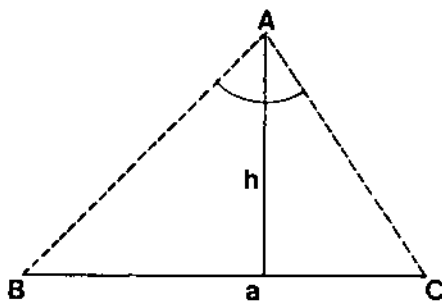


Figura 9

Qual é a incógnita? O ponto A .

Quais são os dados? A linha h , um ângulo α e dois pontos B e C , dados em posição.

Qual é a condicionante? A distância perpendicular do ponto A à linha BC deve ser h e $\angle BAC = \alpha$.

Transformamos assim o nosso problema original, mudando tanto a incógnita quanto os dados. A nova incógnita é um ponto, a original era um triângulo. Alguns dos dados são os mesmos em ambos os problemas, a linha h e o ângulo α . Mas no problema original foi dada uma linha h e agora temos, em seu lugar, dois pontos, A e B .

O novo problema não é difícil. A sugestão que segue nos aproxima da sua solução.

Separe as diversas partes da condicionante. A condicionante tem duas partes, uma relativa ao dado h e outra ao dado α . O ponto que constitui a incógnita deve

(I) estar a uma distância h da linha BC ; e

(II) ser o vértice de um ângulo do valor dado α , cujos lados passam pelos pontos dados, B e C .

Se mantivermos apenas uma parte da incógnita e deixarmos a outra de lado, a incógnita não ficará perfeitamente determinada, pois há muitos pontos que satisfazem a parte (I) da condicionante, isto é, todos os pontos de uma paralela à linha BC e desta situada à distância h . Essa paralela é o lugar geométrico dos pontos que satisfazem a parte (I) da condicionante. O lugar geométrico dos pontos que satisfazem a parte (II) é um certo arco circular cujas extremidades são B e C . Podemos descrever ambos os lugares geométricos e a sua interseção é o ponto que desejamos determinar.

O procedimento que acabamos de aplicar apresenta um certo interesse. Na resolução de problemas geométricos, muitas vezes ele é, com sucesso, tomado por modelo: reduzir o problema à determinação de um ponto e determiná-lo pela interseção de dois lugares geométricos.

Há, porém, um certo passo deste procedimento que apresenta um interesse ainda mais geral. Na resolução de "problemas de determinação", seja qual for o tipo, podemos seguir esta sugestão: *Manter apenas uma parte da condicionante e deixar a outra de lado.* Com isso, enfraquecemos a condicionante do problema proposto, pois a incógnita fica menos restrita. *Até que ponto fica assim a incógnita determinada, como pode ela variar?* Com esta indagação, estabelecemos, de fato, um novo problema. Se a incógnita for um ponto do plano (como o era em nosso exemplo), a solução deste novo problema consistirá na determinação de um lugar geométrico descrito pelo ponto. Se a incógnita for um objeto matemático de algum outro tipo (era um quadrado na seção 18), teremos de descrever apropriadamente e de caracterizar precisamente um certo conjunto de objetos. Mesmo se a incógnita não for um

*Considera-se a linha BC como a bissetriz do plano. Escolhemos um dos semiplanos para nele determinar A e assim podemos considerar apenas uma paralela a BC , pois, do contrário, teríamos de considerar duas dessas paralelas.

objeto matemático (como no exemplo seguinte, do item 8), poderá ser conveniente considerar, caracterizar, descrever ou relacionar aqueles objetos que satisfizerem uma certa parte da condicionante imposta à incógnita pelo problema proposto.

8. *Exemplo.* Num jogo de palavras cruzadas, que contém trocadilhos e anagramas, encontramos a seguinte chave:

“Para frente e para trás, é uma peça de máquina (5 letras).”

Qual é a incógnita? Uma palavra.

Qual é a condicionante? A palavra tem cinco letras e tem algo a ver com alguma peça de uma máquina qualquer. Ela deve ser, naturalmente, uma palavra do idioma e, esperamos, não muito rara.

A condicionante é suficiente para determinar a incógnita? Não. Ou, melhor, a condicionante pode ser suficiente, mas aquela sua parte que, para nós, está agora clara é certamente insuficiente. Há palavras demais que a possam satisfazer, tais como “biela”, “freio” e tantas outras.

A condicionante está expressa com ambigüidade — de propósito, é claro. Se nada nos ocorrer que possa ser razoavelmente descrito como uma peça de máquina que se desloque “para frente” e, também, “para trás”, podemos suspeitar que isto se refira à leitura da palavra.

Separe as diversas partes da condicionante. A condicionante contém duas partes, uma relativa ao significado da palavra, outra à sua grafia. A palavra procurada deve ser

(I) uma palavra curta que signifique alguma peça de uma máquina;

(II) uma palavra de cinco letras que, lida de trás para diante, signifique também uma peça de máquina.

Se mantivermos apenas uma parte da condicionante, deixando a outra de lado, a incógnita não ficará perfeitamente determinada. Há muitas palavras que satisfazem a parte (I) da condicionante e, assim, temos uma espécie de lugar geométrico. Podemos descrever esse lugar geométrico (I), “seguir-lo” até a sua “interseção” com o lugar geométrico (II). O procedimento natural consiste em concentrar na parte (I) da condicionante, relembrar palavras que tenham o necessário significado e examinar se elas têm ou não o número de letras exigido. É possível que tenhamos de relembrar muitas palavras até chegarmos à certa: biela, freio, bomba, polia, motor.

É claro, “rotor”!

9. No item 3, classificamos as possibilidades de encontrar um novo “problema de determinação” pela recombinação de certos elementos de um outro “problema de determinação”, proposto. Se introduzirmos não apenas um problema, mas dois ou mais, haverá mais possibilidades que teremos de mencionar, mas não tentaremos classificar.

Outras possibilidades podem ainda surgir. Em particular, a resolução de um “problema de determinação” pode depender da resolução de um “problema de demonstração”. Apenas mencionamos esta importante possibilidade, pois considerações de espaço nos impedem de discuti-la aqui.

10. Apenas algumas poucas e breves observações podem ser acrescentadas a propósito de “problemas de demonstração”. Elas são análogas aos comentários, mais extensos, relativos a “problemas de determinação” (itens 2 a 9).

Uma vez compreendido o problema como um todo, devemos, de maneira geral, examinar as suas partes principais, que são a hipótese e a conclusão do teorema que temos de demonstrar ou de refutar. Precisamos compreender perfeitamente tais partes. *Qual é a hipótese? Qual é a conclusão?* Se houver necessidade de descer a pontos mais específicos, poderemos *separar as diversas partes da hipótese* e examiná-las uma a uma. Podemos então passar a outros detalhes, decompondo mais e mais o problema.

Depois de decomposto o problema, podemos tentar recombinar os seus elementos de maneira nova. Em particular, podemos ensaiar a recombinação dos elementos em um outro teorema. A este respeito, três são as possibilidades:

(1) *Manter a conclusão* e mudar a hipótese. Tentamos primeiro relembrar um tal teorema: *Considere a conclusão. E procure pensar num teorema conhecido que tenha a mesma conclusão ou outra semelhante.* Se não conseguirmos relembrar tal teorema, procuremos inventar um: *É possível imaginar uma outra hipótese da qual se possa facilmente deduzir a conclusão?* Podemos mudar a hipótese pela omissão de alguma coisa, sem nada lhe acrescentar: *Mantenha apenas uma parte da hipótese e deixe a outra de lado. A conclusão continua válida?*

(2) *Manter a hipótese* e mudar a conclusão: *É possível obter algo de útil da hipótese?*

(3) *Manter tanto a hipótese quanto a condicionante.* Podemos estar mais inclinados a mudar ambas se não tivermos sucesso com a mudança de uma só delas. *É possível mudar a hipótese, ou a conclusão, ou ambas, se necessário, de modo a que a nova hipótese e a nova conclusão fiquem mais próximas uma da outra?*

Não tentamos aqui classificar as diversas possibilidades que surgem quando, para resolver um “problema de demonstração” proposto, introduzimos dois ou mais “problemas de demonstração” ou quando o relacionamos com um “problema de determinação” apropriado.

Definições de termos são descrições de seus significados por meio de outros termos que se supõe sejam bem conhecidos.

1. Os *termos técnicos* da Matemática são de duas categorias. Uns são aceitos como termos primitivos e não se definem. Outros, consideram-se termos derivados e

são definidos normalmente, isto é, seus significados são formulados em termos primitivos e em outros termos derivados, previamente definidos. Assim, não se dão definições formais de noções primitivas, tais como ponto, reta e plano.* No entanto, damos definições formais de noções tais como "bissetriz de um ângulo", "círculo" e "parábola".

A definição do último termo mencionado pode ser feita da maneira seguinte. Chamamos *parábola* o lugar geométrico dos pontos equidistantes de um ponto fixo e de uma reta fixa. O ponto fixo é chamado o *foco* da parábola e a reta fixa, a sua *diretriz*. Fica entendido que todos os elementos considerados encontram-se num plano fixo e que o ponto fixo (o foco) não está sobre a reta fixa (a diretriz).

Não se presume que o leitor conheça os significados dos termos definidos: parábola, foco da parábola, diretriz da parábola. Mas admite-se que ele saiba o significado de todos os outros termos, tais como ponto, reta, plano, distância entre dois pontos, lugar geométrico etc.

2. *As definições dos dicionários* não diferem muito das definições matemáticas na sua forma aparente, mas elas são redigidas com um outro espírito.

O autor de um dicionário interessa-se pelo significado corrente das palavras. Ele *aceita*, evidentemente, esse sentido corrente e o enuncia, com toda a clareza que lhe for possível, sob a forma de uma definição.

O matemático não se preocupa com o sentido corrente dos seus termos técnicos, pelo menos ele não está principalmente interessado nisso. O que "círculo", "parábola" ou outros termos técnicos dessa espécie possam ou não significar na linguagem corrente, pouco lhe importa. A definição matemática *cria* o significado matemático.

3. *Exemplo.* Determinar o ponto de interseção de uma reta dada com uma parábola da qual são dados o foco e a diretriz.

A nossa abordagem de qualquer problema depende, necessariamente, do estágio do nosso conhecimento. A nossa abordagem do presente problema dependerá, principalmente, da nossa maior ou menor familiaridade com as propriedades da parábola. Se muito soubermos acerca da parábola, tentaremos usar nosso conhecimento e dele extrair alguma coisa de útil: *Conhece um problema que possa ser útil? Conhece um problema correlato?* Se soubermos pouco sobre parábola, foco e diretriz, estes termos serão até embaraçosos e, naturalmente, desejaremos nos livrar deles. Mas, como conseguir isto? Acompanhemos o diálogo entre um professor e um de seus alunos, que discutem o problema proposto. Eles já escolheram uma *notação*

*A este respeito, as idéias mudaram desde os tempos de Euclides e seus discípulos gregos, que definiram o ponto, a reta e o plano. Mas as suas "definições" mal podiam ser consideradas definições formais, pois eram mais uma espécie de explicações. Naturalmente, explicações são admissíveis, e mesmo desejáveis, no ensino.

adequada: P para o ponto de interseção a determinar, F para o foco, d para a diretriz e c para a reta de interseção da parábola.

— *E qual é a incógnita?*

— O ponto P .

— *Quais são os dados?*

— As retas c e d e o ponto F .

— *Qual é a condicionante?*

— P é um ponto de interseção da reta c com a parábola cuja diretriz é d e cujo foco é F .

— Certo. Sei que teve poucas oportunidades de estudar a parábola, mas penso que é capaz de dizer o que uma parábola.

— A parábola é o lugar geométrico dos pontos eqüidistantes do foco e da diretriz.

— Certo. Lembra-se bem da definição, mas é preciso utilizá-la: *volte às definições*. Pela definição de parábola, o que me pode dizer a respeito do ponto P .

— P está sobre a parábola. Portanto, P é eqüidistante de d e F .

— Muito bem. *Trace uma figura.*

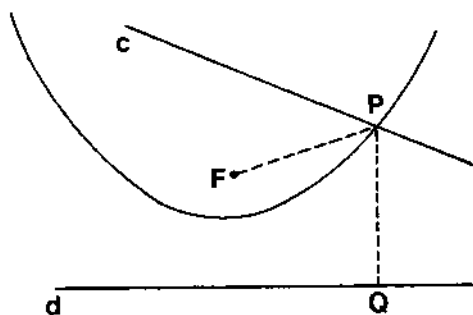


Figura 10

O aluno acrescenta à figura 10 as linhas PF e PQ , sendo esta última a perpendicular baixada de P sobre d .

— *Agora, é possível reformular o problema?*

—

— É possível reformular a condicionante do problema, usando as linhas que acabou de acrescentar?

- P é um ponto da reta c tal que $PF = PU$.
- Certo. Mas, por favor, explique isso em palavras: o que é PQ ?
- É a distância perpendicular de P a d .
- Certo. Pode agora reformular o problema? Mas, por favor, enuncie-o com clareza, numa frase simples.
- Determinar o ponto P da reta dada c eqüidistante do ponto dado F e da reta dada d .
- Observe o progresso que fez desde o enunciado original até a sua reformulação. Aquele estava tão cheio de estranhos termos técnicos, parábola, foco, diretriz, que até soava um pouco pomposo e empolado. E agora nada resta de tais termos: o problema ficou *enxuto*. Parabéns!

4. A *eliminação de termos técnicos* foi o resultado do trabalho do exemplo acima. Partimos dum enunciado do problema que continha certos termos técnicos (parábola, foco, diretriz) e chegamos finalmente a uma reformulação isenta de tais termos.

Para eliminar um termo técnico, precisamos conhecer a sua definição: mas não basta conhecê-la, é preciso utilizá-la. No exemplo precedente, não bastou lembrar da definição de parábola. O passo decisivo consistiu em acrescentar à figura as linhas PF e PQ , cuja igualdade era assegurada pela definição de parábola. Este é um procedimento típico. Introduzimos, na concepção do problema, elementos apropriados. Com base na definição, estabelecemos relações entre os elementos introduzidos. Se estas relações expressarem completamente o significado, teremos utilizado a definição e, assim, eliminado o termo técnico.

O procedimento que acaba de ser descrito pode ser chamado a *volta às definições*.

Pela volta à definição de um termo técnico, libertamo-nos do termo mas introduzimos, em seu lugar, novos elementos e novas relações. A decorrente modificação de nossa concepção do problema pode ser importante. De qualquer maneira, alguma reformulação, alguma VARIAÇÃO DO PROBLEMA, deverá disso resultar.

5. *Definições e teoremas conhecidos*. Se conhecermos o nome “parábola” e tivermos uma vaga idéia da forma da curva, porém se nada mais sobre ela sabemos, o nosso conhecimento será evidentemente insuficiente para resolver o problema proposto como exemplo ou qualquer outro problema sério relativo à parábola. Que tipo de conhecimento necessitamos para tal fim?

Podemos considerar que a ciência da Geometria consiste em axiomas, definições e teoremas. A parábola não é mencionada em teoremas que tratam apenas de termos primitivos, tais como ponto, reta e outros. Qualquer argumentação geométrica relativa à parábola ou à resolução de qualquer problema a ela referente deve utilizar a sua definição, ou teoremas a ela pertinentes. Para resolver um tal problema, é

preciso conhecer pelo menos a definição, mas é melhor conhecer também alguns teoremas.

O que dissemos da parábola aplica-se, naturalmente, a qualquer outra noção derivada. Quando iniciamos a resolução de um problema que envolve uma tal noção, não podemos ainda saber o que será preferível utilizar: a definição da noção ou algum teorema a ela referente. Mas o certo é que teremos de utilizar uma ou outro.

Há casos, porém, em que não temos escolha. Se conhecermos apenas a noção, e nada mais, seremos então obrigados a utilizar a definição. Se pouco mais soubermos além da definição, a nossa melhor chance será voltar à definição. Se, porém, conhecermos muitos teoremas relativos àquela noção e tivermos muita experiência na sua aplicação, haverá muitas probabilidades de encontrarmos um teorema apropriado ao caso.

6. *Definições diversas.* A esfera é geralmente definida como o lugar geométrico dos pontos eqüidistantes de um ponto dado. (Os pontos estão agora no espaço, não mais restritos a um plano). Não obstante, a esfera pode também ser definida como a superfície gerada por um círculo que gira em torno de seu diâmetro. Conhecem-se ainda outras definições da esfera e muitas mais são ainda possíveis.

Quando tivermos de resolver um problema que envolva alguma noção derivada, como "esfera" ou "parábola", e desejarmos voltar à sua definição, poderemos escolher uma entre várias definições. Muito irá depender, em tal caso, da escolha adequada ao caso.

O cálculo da área da superfície da esfera constituiu, à época em que Arquimedes o resolveu, um grande e difícil problema. Ele tinha, à sua escolha, as definições de esfera que acabamos de mencionar. Preferiu, então, conceber a esfera como a superfície gerada por um círculo que gira em torno de um diâmetro fixo. Inscreveu no círculo um polígono, com um número par de lados, do qual o diâmetro fixo liga vértices opostos. O polígono regular aproxima-se do círculo e, girando com este, gera uma superfície convexa composta de dois cones com vértices nas extremidades do diâmetro fixo e de diversos troncos de cones intermediários. Esta superfície composta aproxima-se da esfera e foi utilizada por Arquimedes para calcular a área da superfície desta. Se concebermos a esfera como o lugar geométrico dos pontos eqüidistantes do centro, não haverá nenhuma sugestão semelhante de simples aproximação da sua superfície.

7. Voltar às definições é importante na invenção de um argumento, mas também o é na sua verificação.

Alguém pretende apresentar uma nova resolução para o problema de Arquimedes — o cálculo da superfície da esfera. Se essa pessoa apenas tiver uma vaga idéia sobre a esfera, a sua resolução não poderá ter qualquer valor. É possível que tenha uma clara concepção da esfera, mas se deixar de utilizá-la em seu argumento, não poderemos saber se ela tem realmente qualquer idéia sobre este sólido e, portanto,

de nada valerá o argumento. Por conseguinte, ao escutar o seu argumento, ficamos a aguardar o momento em que ela dirá algo substancial sobre a definição de esfera ou um teorema relativo. Se tal momento nunca chegar, a resolução não prestará.

Da mesma maneira, devemos verificar, não só os argumentos dos outros, mas também, naturalmente, os nossos próprios argumentos. *Levou em consideração todas as noções essenciais que interessam ao problema?* Como utilizou a noção? Utilizou o seu significado, a sua definição? Utilizou fatos essenciais, teoremas conhecidos relevantes?

A importância da volta às definições para verificar um argumento foi realçada por Pascal, que formulou a regra: "*Substituer mentalement les définitions à la place des définis*", cujo sentido é "substituir mentalmente os termos definidos pelos fatos definidores". Que a volta às definições é também importante para inventar um argumento foi destacado por Hadamard.

8. A volta às definições constitui uma importante operação mental. Se desejamos compreender a importância das palavras, precisamos primeiro sentir que as palavras são importantes. Dificilmente podemos raciocinar sem o auxílio de palavras, ou de signos, ou de símbolos de qualquer espécie. Assim, palavras e signos têm poder. Os povos primitivos acreditavam que as palavras e os signos tinham poder mágico; podemos compreender essa crença, mas dela não devemos compartilhar. Precisamos saber que o poder de uma palavra não reside no seu som, no *vocis flatus*, nas vibrações do ar produzidas pelas cordas vocais do locutor, e sim nas idéias que a palavra nos traz à mente e, por fim, nos fatos em que se baseiam essas idéias.

Portanto, é bom procurar o sentido e os fatos que ficam por detrás das palavras. Ao voltar às definições, o matemático procura assenhorear-se das reais relações de elementos matemáticos que estão por detrás dos termos técnicos, assim como o físico procura confirmações experimentais para seus termos técnicos e o homem comum, com algum bom senso, procura chegar aos fatos reais e não ser iludido por meras palavras.

Demonstração por absurdo e demonstração indireta. São procedimentos diferentes, porém correlatos.

A *demonstração por absurdo* mostra a falsidade de uma suposição derivando dela um absurdo flagrante. É um procedimento matemático, mas se assemelha à ironia, que é o procedimento predileto do satirista. A ironia adota, com todas as aparências, uma determinada opinião, que é exagerada e repetida até conduzir a um manifesto absurdo.

A *demonstração indireta* estabelece a verdade de uma afirmativa por revelar a falsidade da suposição oposta. Deste modo, ela apresenta certa semelhança com a astúcia do político que procura firmar os méritos de um candidato pela demolição da reputação do seu oponente.

Tanto a demonstração por absurdo quanto a demonstração indireta são eficazes instrumentos da descoberta, que se apresentam naturalmente a todo espírito atento. Não obstante, alguns filósofos e muitos principiantes têm por elas uma certa aversão, o que se compreende: nem todos apreciam pessoas sarcásticas ou políticos astuciosos. Em primeiro lugar, demonstraremos, por meio de exemplos, a eficácia de ambos os procedimentos e, em seguida, discutiremos as objeções que contra eles se apresentam.

1. *Demonstração por absurdo.* Escrever números usando cada um dos dez algarismos uma só vez, de tal modo que a soma desses números seja exatamente 100.

Podemos aprender alguma coisa na tentativa de resolver este enigma, cujo enunciado exige algum esclarecimento.

Qual é a incógnita? Um conjunto de números, e por número queremos aqui dizer, naturalmente, inteiros.

O que é dado? O número 100.

Qual é a condicionante? A condicionante tem duas partes. Primeira, ao escrevermos o desejado conjunto de números, devemos usar cada um dos dez algarismos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9 apenas uma vez. Segunda, a soma de todos os números do conjunto deve ser 100.

Mantenha apenas uma parte da condicionante, deixe a outra de lado. A primeira parte, sozinha, é fácil de satisfazer. Tome-se o conjunto 19, 28, 37, 46, 50: cada algarismo ocorre só uma vez. Mas, é evidente, a segunda parte da condicionante não fica satisfeita: a soma desses números é 180 e não 100. Poderíamos, porém, fazer melhor. "Continue a tentar". Sim

$$19 + 28 + 30 + 7 + 6 + 5 + 4 = 99.$$

A primeira parte da condicionante é satisfeita e a segunda quase o é: chegamos a 99 em lugar de 100. Naturalmente, poderemos facilmente satisfazer a segunda parte se abandonarmos a primeira:

$$19 + 28 + 31 + 7 + 6 + 5 + 4 = 100.$$

A primeira parte não é satisfeita: o algarismo 1 ocorre duas vezes e o 0 nenhuma. "Continue a tentar."

Após mais algumas tentativas infrutíferas, somos, porém, levados a suspeitar de que não é possível obtermos 100 da maneira pedida. A um certo momento, surge o problema: *demonstrar que é impossível satisfazer simultaneamente ambas as partes da condicionante.*

Até mesmo excelentes estudantes podem achar que este problema está acima das suas possibilidades. No entanto, a resposta é bastante fácil, se adotarmos a atitude correta. *Temos de examinar a situação hipotética em que ambas as partes da condicionante são satisfeitas.*

Suspeitamos que esta situação realmente não pode ocorrer e a suspeita, baseada na experiência das nossas infrutíferas tentativas, tem algum fundamento. Não obstante, livre-mo-nos de preconceitos e enfrentemos a situação em que, hipoteticamente, supostamente, presumidamente, ambas as partes da condicionante são satisfeitas. Imaginemos um conjunto de números cuja soma é 100. Esses números serão de um ou dois algarismos. Há dez algarismos, e eles devem todos ser diferentes, pois cada um deles, 0, 1, 2,.....9 deve ocorrer apenas uma vez. Assim, a soma de todos estes algarismos deve ser

$$0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45.$$

Alguns destes algarismos denotam unidades e outros, dezenas. É preciso um pouco de sagacidade para acertar com a idéia de que a soma dos algarismos que denotam dezenas pode ter alguma importância. De fato, seja t essa soma. Então, a soma de todos os números do conjunto deve ser

$$10t + (45 - t) = 100.$$

Temos aqui uma equação do primeiro grau em t , que nos fornece

$$t = \frac{55}{9}.$$

Ora, há nisto alguma coisa definitivamente errada. O valor que encontramos para t é fracionário, quando t , evidentemente, deve ser inteiro. A partir da suposição de que ambas as partes da condicionante imposta podem ser simultaneamente satisfeitas, fomos levados a um flagrante absurdo. Como explicar isto? A nossa suposição original deve estar errada: é impossível satisfazer, ao mesmo tempo, as duas partes da condicionante. E assim chegamos ao nosso objetivo: conseguimos demonstrar que as duas partes da condicionante imposta são incompatíveis.

O nosso raciocínio foi uma típica demonstração por absurdo.

2. *Observações.* Reexaminemos o raciocínio para compreender a sua orientação geral.

Desejamos demonstrar que é impossível satisfazer uma certa condicionante, isto é, que a situação na qual todas as partes da condicionante são simultaneamente satisfeitas não pode jamais surgir. Mas, se nada ainda houvermos demonstrado, teremos de encarar a possibilidade de que a situação possa surgir. Somente encarando frontalmente a situação hipotética e examinando-a cuidadosamente poderemos ter a esperança de perceber nela um ponto definitivamente errado. E precisamos pôr a mão num ponto definitivamente errado, se desejarmos demonstrar conclusivamente que a situação é impossível. Daí podemos ver que o procedimento que serviu ao nosso exemplo é razoável em geral: *temos de examinar a situação hipotética na qual to-*

das as partes da condicionante são satisfeitas, embora tal situação pareça extremamente improvável.

O leitor mais experimentado pode notar aqui um outro ponto. O principal passo do nosso procedimento consistiu no estabelecimento da equação em z . Ora, poderíamos ter chegado à mesma equação sem suspeitar que houvesse algo de errado com a condicionante. Se desejamos estabelecer uma equação, temos de expressar, em linguagem matemática, que todas as partes da condicionante são satisfeitas, *muito embora não saibamos, ainda, se é realmente possível satisfazer simultaneamente todas essas partes.*

O nosso procedimento é seguido com "isenção": podemos ter a esperança de encontrar a incógnita que satisfaça a condicionante, ou a de demonstrar que esta não pode ser satisfeita. Sob um aspecto, isto pouco importa: a investigação, se for bem conduzida, começa da mesma maneira em ambos os casos, pelo exame da situação hipotética na qual a condicionante é satisfeita, e somente mais tarde revela qual das nossas esperanças é a que se justifica.

Compare com FIGURAS, 2. Compare também com PAPPUS: uma análise que termina por refutar o teorema proposto, ou por mostrar que o proposto "problema de determinação" não tem solução, é na verdade uma demonstração por absurdo.

3. *Demonstração indireta.* Os números primos ou, simplesmente, primos são os números 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, ... que não podem ser decompostos em fatores menores, embora sejam maiores do que 1. (A última cláusula exclui o número 1 que, evidentemente, não pode ser decomposto em fatores menores, mas que apresenta uma natureza diferente e não pode ser considerado primo). Os primos são os "elementos últimos" em que todos os inteiros (maiores do que 1) podem ser decompostos. Por exemplo,

$$630 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$$

decompõe-se num produto de cinco primos.

A série dos números é infinita ou termina em algum lugar? É natural que se suspeite que a série dos primos não tenha fim. Se ela terminasse em algum lugar, todos inteiros poderiam ser decompostos num número finito de elementos últimos e o mundo pareceria "pobre demais", numa força de expressão. Surge assim o problema de demonstrar a existência de uma infinidade de números primos.

O problema é muito diferente daqueles que se encontram normalmente na Matemática elementar e parece, à primeira vista, inacessível. No entanto, como dissemos, é extremamente improvável que haja um último primo, digamos P . Por que isto é tão improvável?

Enfrentemos a impossível situação em que, hipoteticamente, supostamente, exista um último primo P . Neste caso, poderíamos escrever a série completa dos

primos 2, 3, 5, 7, 11 P . Por que isto é tão improvável? O que há de errado nisto? É possível identificar nisto algo definitivamente errado? É claro que sim. Podemos compor o número

$$Q = (2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11) \dots P + 1.$$

Este número Q é maior do que P e, portanto, supostamente, Q não pode ser primo. Em consequência, Q deve ser divisível por um primo. Ora, os primos de que dispomos são, supostamente, os números 2, 3, 5 P , porém Q , dividido por qualquer um destes números deixa por resto 1. Portanto, Q não é divisível por nenhum dos primos mencionados, que são, hipoteticamente, todos os primos. Ora, há alguma coisa definitivamente errada: Q deve ser ou um número primo, ou divisível por algum primo. Partindo da suposição de haver um último primo, fomos levados a um flagrante absurdo. Como explicar isto? A nossa suposição original deve estar errada, não pode haver um último primo. E assim conseguimos demonstrar que a série dos números primos não tem fim.

Esta é uma típica demonstração indireta. (É também famosa e devida a Euclides, encontrando-se na Proposição 20, do Livro IX dos *Elementos*).

Demonstramos assim o nosso teorema (que a série dos números primos não tem fim) pela refutação do seu oposto (que a série dos primos termina em algum ponto), o qual foi refutado, por dele termos deduzido um manifesto absurdo. Combinamos, assim, a demonstração indireta com a demonstração por absurdo. Esta combinação é também muito típica.

4. *Objeções.* Os procedimentos que estamos estudando têm encontrado forte oposição. Contra eles foram levantadas muitas objeções, que talvez possam ser consideradas formas diferentes de uma mesma objeção fundamental. Discutimos aqui uma forma "prática" de objeções, que se situa ao nosso nível.

Encontrar uma demonstração não muito óbvia constitui um grande sucesso intelectual, mas para aprender essa demonstração, ou mesmo para compreendê-la perfeitamente, é necessário um certo esforço mental. É bastante natural que desejemos obter algum lucro de nosso esforço e, para isso, é claro, aquilo que ficar retido em nossa memória deverá ser verdadeiro e correto, não falso ou absurdo.

Mas parece difícil que, de uma demonstração por absurdo, possa resultar alguma coisa de verdadeiro. O procedimento parte de uma suposição falsa e daí deduz consequências que o são igualmente — talvez ainda mais visivelmente — falsas, até chegar à última consequência, esta flagrantemente falsa. Se não desejarmos guardar falsidades na memória, deveremos esquecer tudo, o mais depressa possível, o que não é, porém, viável, pois todos os pontos devem ser lembrados, com nitidez e correção, no decorrer do estudo da demonstração.

A objeção à demonstração indireta pode ser agora formulada muito resumidamente. A acompanharmos uma tal demonstração, somos obrigados a concentrar,

continuamente, a atenção numa suposição falsa, que devemos esquecer, e não no teorema verdadeiro, que devemos reter.

Se desejarmos avaliar corretamente os méritos destas objeções, deveremos distinguir entre duas utilidades da demonstração por absurdo, entre um instrumento da pesquisa e um meio de exposição, e estabelecer a mesma distinção no que se refere à demonstração indireta.

Deve-se confessar que a "demonstração por absurdo" não apresenta só vantagens, pois ela, especialmente se for longa, pode tornar-se muito penosa para o leitor ou ouvinte. Todas as deduções que examinamos são corretas, mas todas as situações que temos de enfrentar são impossíveis. Mesmo a expressão verbal pode tornar-se enfadonha se insistir, como deve, em frisar que tudo está baseado numa suposição inicial. Assim, as palavras "hipoteticamente", "supostamente", "presumidamente" precisam ser repetidas incessantemente, ou então é necessário usar continuamente de outro recurso. Desejamos rejeitar e esquecer a situação, por ser ela impossível, mas temos de retê-la e examiná-la porque é a base do passo seguinte. Esta discórdia pode tornar-se insuportável a longo prazo.

Seria uma tolice repudiar a demonstração por absurdo como um instrumento de descoberta. Ela pode apresentar-se naturalmente e trazer uma decisão quando todos os outros meios estiverem esgotados, como os exemplos anteriores podem mostrar.

Precisamos de alguma experiência para perceber que não há nenhuma contradição essencial entre as duas posições. A experiência revela que geralmente não é difícil converter uma demonstração indireta em outra direta, ou em transformar uma longa demonstração por absurdo em outra, cuja forma é mais agradável e da qual o absurdo pode até desaparecer completamente ou, após a devida preparação, ficar comprimido em poucas observações marcantes.

Em suma, se desejamos utilizar plenamente a nossa capacidade, devemos estar familiarizados tanto com a demonstração por absurdo quanto com a indireta. Quando, porém, conseguirmos chegar ao resultado por qualquer um destes processos, não devemos esquecer de reexaminá-lo e de indagar: *É possível chegar ao resultado por um caminho diferente?*

Ilustremos, com o auxílio de exemplos, o que acabamos de dizer!

5. *Transformação de uma demonstração por absurdo.* Voltemos ao raciocínio apresentado no item 1. A demonstração partiu de uma situação que, eventualmente, revelou-se impossível. Mas retiremos uma parte do argumento que é independente da falsa suposição original e que contém informação positiva. Reconsiderando o que foi feito, podemos perceber que, pelo menos, isto é verdadeiro: se um conjunto de números for escrito de tal maneira que cada um dos dez algarismos ocorra uma vez só, a soma do conjunto será da forma

$$10t + (45 - t) = 9(t + 5).$$

Assim sendo, esta soma é divisível por 9. O enigma proposto exige, porém que ela seja igual a 100. Será isto possível? Não, pois 100 não é divisível por 9.

A demonstração por absurdo que nos levou à descoberta do argumento desapareceu desta nossa apresentação.

A propósito, o leitor que conhece a "prova dos nove fora" poderá agora perceber, num relance, todo o argumento.

6. *Conversão de uma demonstração indireta.* Voltemos ao raciocínio apresentado no item 3. Reconsiderando cuidadosamente o que foi feito, podemos encontrar no argumento elementos que são independentes da falsa suposição, mas a melhor indicação provém de uma reconsideração do significado do próprio problema.

Que queremos dizer ao afirmarmos que a série dos números primos não tem fim? É claro que apenas isto: quando verificada qualquer série de primos, como 2, 3, 5, 7, 11, P , na qual P é o último primo até aí encontrado, haverá sempre mais um primo. Assim, o que devemos fazer para demonstrar a existência de uma infinidade de números primos? Temos de indicar a maneira de encontrar um primo diferente de todos os primos até agora encontrados. Deste modo, o nosso "problema de demonstração" fica, de fato, reduzido a um "problema de determinação": *Sendo dados os números primos 2, 3, 5, P , encontrar um novo primo N diferente de todos os primos dados.*

Assim reformulado o nosso problema, demos o passo principal. É agora relativamente simples perceber como utilizar as partes principais do nosso argumento anterior para o novo objetivo. Com efeito, o número

$$Q = (2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot \dots \cdot P) + 1$$

é certamente divisível por um primo. Tomemos — esta é a idéia — qualquer divisor primo de Q (por exemplo, o menor deles) para N . (É evidente que, se Q for um número primo, $N = Q$.) Como é óbvio, Q dividido por qualquer dos primos 2, 3, 5, P deixa por resto 1 e, portanto, nenhum destes números poderá ser N , que é um divisor de Q . Mas isto é tudo de que precisamos: N é um número primo e diferente de todos os primos 2, 3, 5, 7, 11 P até aí encontrados.

Esta demonstração proporciona um procedimento que permite prolongar indefinidamente a série dos números primos, sem limite. Nada nela é indireto, não é preciso considerar qualquer situação impossível. No entanto, ela é fundamentalmente a mesma demonstração indireta que conseguimos agora converter.

Descartes, René (1596-1950), grande matemático e filósofo, planejou a publicação de um método universal para resolver problemas, porém deixou inacabadas as suas *Regras para a Direção do Espírito*. Os fragmentos deste tratado, encontrados en-

tre os seus manuscritos impressos após a sua morte, contêm, com referência à solução de problemas, matéria mais substanciosa — e mais interessante — do que a sua obra mais conhecida, o *Discours de la Méthode*, embora seja provável que esta última haja sido escrita depois daquelas. A seguinte observação de Descartes parece descrever a origem das Regras: “Quando jovem, ao ouvir falar de invenções engenhosas, tentei inventá-las eu próprio, sem nada ter lido dos seus autores. Ao fazê-lo, percebi, gradualmente, que estava a utilizar certas regras.”

Diagnóstico é empregado aqui como um termo técnico de Educação, com o significado de “caracterização mais rigorosa do aproveitamento do aluno”. Uma nota de exame caracteriza esse aproveitamento, mas de forma algo grosseira. O professor que desejar melhorar o aproveitamento de seus alunos necessitará de uma caracterização mais rigorosa dos aspectos bons e maus, assim como o médico, que deseja melhorar a saúde de seus pacientes, necessita de um diagnóstico.

Estamos, aqui, particularmente interessados na eficácia dos estudantes no que se refere à resolução de problemas. Como caracterizá-la? Podemos aproveitar a distinção entre as quatro fases da resolução. De fato, o comportamento do estudante nessas diferentes fases é muito característico.

A *compreensão* incompleta do problema, em consequência da falta de concentração, talvez seja a deficiência mais comum. No que diz respeito à *concepção do plano* e à visualização de uma idéia geral da resolução, dois defeitos opostos são muito freqüentes: alguns alunos atiram-se ao cálculo e ao desenho sem qualquer plano ou idéia geral; outros, esperam desajeitadamente que surja alguma idéia e nada fazem para apressar a sua aparição. Na *execução do plano*, o defeito mais freqüente é o desleixo, a falta de paciência para verificar cada passo. A omissão da *verificação do resultado* é muito comum: o aluno contenta-se em obter uma resposta, põe de lado o lápis e não se espanta com os resultados, por mais disparatados que eles forem.

O professor que fizer um diagnóstico cuidadoso de qualquer defeito deste tipo terá oportunidade de corrigi-lo, se insistir em certas indagações da nossa lista.

É possível chegar ao resultado por um caminho diferente? Quando a resolução a que finalmente chegamos é longa e complicada, suspeitamos, instintivamente, de que haja um outro processo mais claro e com menos rodeios: *É possível chegar ao resultado por um caminho diferente? É possível vê-lo num relance?* Até mesmo quando conseguimos encontrar uma resolução satisfatória, podemos estar ainda interessados em achar uma outra. Desejamos nos convencer da validade de um resultado teórico por duas deduções diferentes, da mesma maneira que desejamos perceber um objeto material por meio de dois sentidos diferentes. Tendo encontrado uma demonstração, desejamos achar uma outra, assim como desejamos tocar um objeto depois de tê-lo visto.

É melhor dar duas demonstrações do que uma só. “É mais seguro ancorar com dois ferros”.

1. *Exemplo.* Calcular a área S da superfície lateral de um tronco de cone circular reto, sendo dados o raio da base inferior R , o raio da base superior r e a altura h .

• Este problema pode ser resolvido de várias maneiras. Por exemplo, podemos conhecer a fórmula que dá a superfície lateral do cone inteiro. Como o tronco é obtido pelo corte de um pequeno cone no cone original, a sua superfície lateral será a diferença entre as duas superfícies cônicas. Resta expressá-las em função de R , r e h . Aproveitando essa idéia, chegamos finalmente à fórmula

$$S = \pi(R + r) \sqrt{(R - r)^2 + h^2}$$

Tendo, de uma maneira ou de outra, chegado a este resultado, depois de muitos cálculos, podemos querer um argumento mais claro e mais direto. *É possível chegar ao resultado por um caminho diferente? É possível vê-lo num relance?*

Se desejamos ver intuitivamente todo o resultado, podemos tentar perceber o significado geométrico de suas partes. Assim, é possível observar que

$$\sqrt{(R - r)^2 + h^2}$$

é a *altura inclinada* do tronco. (Altura inclinada é um dos lados não paralelos do trapézio isósceles que, girando em torno de uma linha que liga os pontos médios dos seus lados paralelos, gera o cone (ver figura 11).

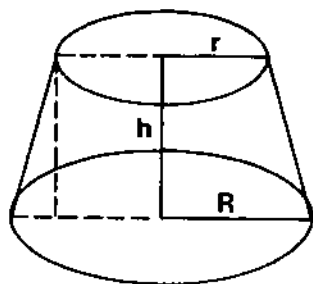


Figura 11

Aqui também podemos descobrir que

$$\pi(R + r) = \frac{2\pi R + 2\pi r}{2}$$

é a média aritmética dos perímetros das duas bases do tronco. Reparando na mesma parte da fórmula, podemos ficar inclinados a escrevê-la sob a forma

$$\pi(R + r) = 2\pi \frac{R + r}{2}$$

que é a fórmula do *perímetro de seção média* do tronco. (Chamamos aqui seção média à interseção do tronco com um plano paralelo às bases inferior e superior do tronco e bissetor de sua altura).

Chegando a novas interpretações das várias partes, podemos ver a fórmula original sob uma luz diferente. Poderemos assim interpretá-la:

$$\text{Área} = \text{Perímetro da seção média} \times \text{Altura inclinada.}$$

Lembramo-nos aqui da regra do trapézio:

$$\text{Área} = \text{Base média} \times \text{Altura.}$$

(A seção média é paralela às duas bases do trapézio e é bissetriz da altura). Ao vermos intuitivamente a analogia entre ambas as expressões, referentes, respectivamente, ao tronco de cone e ao trapézio, percebemos todo o resultado relativo ao tronco “quase num relance”. Isto é, sentimos agora que estamos próximos de uma demonstração curta e direta do resultado alcançado após demorados cálculos.

2. O exemplo anterior é típico. Não inteiramente satisfeitos com a maneira pela qual chegamos ao resultado, desejamos melhorá-lo, modificá-lo. Para isto, estudamos o resultado, procurando compreendê-lo melhor, ver dele um novo aspecto. Podemos primeiro conseguir observar uma nova interpretação de uma certa pequena parte do resultado. Depois, podemos ter a sorte de descobrir um novo modo de conceber alguma outra parte.

Pelo exame das várias partes, uma após outra, e tentando diversas maneiras de considerá-las, podemos ser levados a ver finalmente o resultado inteiro sob uma nova luz, e a nossa nova concepção do resultado pode sugerir uma nova demonstração.

Deve-se admitir que é mais provável que tudo isso ocorra a um matemático experiente que trate de um problema avançado, do que a um principiante que se debate com um problema elementar. O matemático, que dispõe de vastos conhecimentos, está mais exposto do que o principiante ao risco de mobilizar excesso de conhecimentos e de preparar um argumento desnecessariamente complexo. Em compensação, o matemático experiente encontra-se em melhor posição do que o principiante para apreciar a reinterpretação de uma pequena parte do resultado e finalmente chegar, acumulando essas pequenas vantagens, a refundir todo o resultado.

Não obstante, mesmo em turmas muito elementares, pode ocorrer que os alunos apresentem uma resolução desnecessariamente complicada. Aí, então, o professor deve mostrar-lhes, pelo menos, de vez em quando, não apenas como resolver o problema da maneira mais breve, mas também como encontrar, no próprio resultado, indicações da resolução abreviada.

- Ver também DEMONSTRAÇÃO POR ABSURDO E DEMONSTRAÇÃO INDIRETA.

É possível obter algo de útil dos dados? Temos diante de nós um problema a resolver, uma questão em aberto. *Temos de encontrar a relação entre os dados e a incógnita.* Podemos representar nosso problema não resolvido como um espaço aberto entre os dados e a incógnita, como uma brecha sobre a qual precisamos construir uma ponte. Podemos iniciar a sua construção de qualquer lado, a partir da incógnita ou a partir dos dados.

Considere a incógnita! E procure pensar num problema conhecido que tenha a mesma incógnita ou outra semelhante. Isto sugere começar o trabalho a partir da incógnita.

Considere os dados! É possível obter algo de útil dos dados? Isto sugere começar o trabalho a partir dos dados.

Parece que principiar o raciocínio a partir da incógnita é, de modo geral, preferível (ver PAPPUS e REGRESSÃO). No entanto, a outra alternativa, a partir dos dados, também tem probabilidades de sucesso, muitas vezes deve ser tentada e merece ser exemplificada.

Exemplo. São dados três pontos *A*, *B* e *C*. Traçar uma linha *A* que passe entre *B* e *C*, a igual distância de ambos.

Quais são os dados? Os três pontos, *A*, *B* e *C*, são dados pela sua posição. *Traçamos uma figura que mostre os dados* (figura 12).

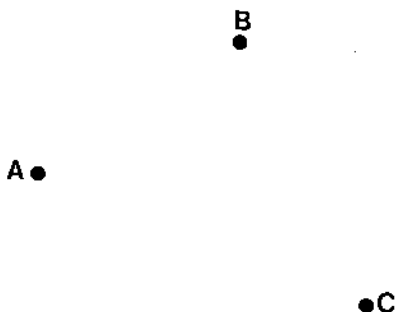


Figura 12

Qual é a incógnita? Uma linha reta.

Qual é a condicionante? A linha procurada passa por A e passa entre B e C , a igual distância dos dois. Reunimos a incógnita e os dados numa mesma figura que mostra as relações necessárias (figura 13).

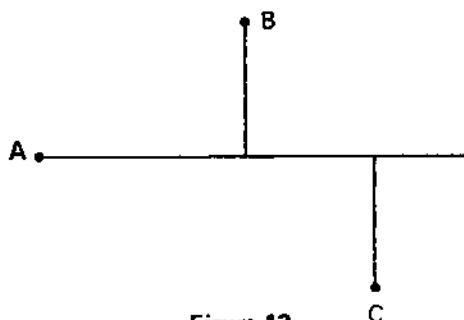


Figura 13

Esta figura, sugerida pela *definição* de distância de um ponto a uma reta, indica os ângulos retos implicados nessa definição.

A figura, tal como está, parece “muito vazia”. A relação entre a reta procurada e os dados A , B e C continua insatisfatória. A figura precisa de alguma coisa mais, alguma linha auxiliar — mas qual? Mesmo um estudante razoável poderá perder-se neste ponto. Há, naturalmente, muitas coisas a tentar, porém a melhor indagação para ressituá-lo será: *É possível obter algo dos dados?*

De fato, quais são os dados? Os três pontos mostrados e a figura 13, nada mais. Não utilizamos ainda suficientemente os pontos B e C , temos de obter deles alguma coisa útil. Mas, que podemos fazer com apenas dois pontos? Ligá-los por uma reta. Assim, traçamos a figura 14.

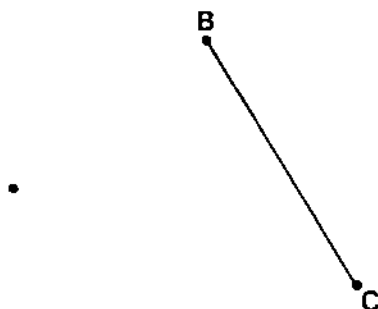


Figura 14

Se superpusermos as figuras 13 e 14, a solução poderá surgir num lampejo: há dois triângulos retângulos, eles são congruentes, apareceu um novo e importantíssimo ponto de interseção.

É possível reformular o problema? *É ainda possível reformulá-lo de outra maneira?* Estas indagações visam a uma adequada VARIAÇÃO DO PROBLEMA.

É possível satisfazer a condicionante? *A condicionante é suficiente para determinar a incógnita? Ou é insuficiente? Ou redundante? Ou contraditória?*

Estas indagações são muitas vezes úteis no estágio inicial, quando ainda não precisamos da resposta final, mas apenas de uma resposta provisória, de uma estimativa. Para exemplos, ver seções 8, 18.

É conveniente prever um aspecto qualquer do resultado que procuramos. Quando temos idéia do que esperar, sabemos melhor em que sentido caminhar. Ora, uma importante característica de um problema é o número de respostas que ele admite. Os problemas mais interessantes são aqueles que admitem uma só solução: somos inclinados a considerar tais problemas como os únicos “razoáveis”. O nosso problema será, neste sentido, “razoável”? Se pudermos responder a esta pergunta, mesmo que seja por uma estimativa plausível, o nosso interesse pelo problema aumentará e assim poderemos trabalhá-lo melhor.

Nosso problema será “razoável”? Esta pergunta será útil num estágio inicial, caso possamos respondê-la com facilidade. Se for difícil obter a resposta, o trabalho que tivermos para obtê-la poderá não ser compensado pelo aumento do interesse. O mesmo é verdade quanto à indagação. *É possível satisfazer a condicionante?* e às indagações correlatas da nossa lista. Devemos fazê-las porque a resposta pode ser fácil e plausível, mas não insistir nelas quando a resposta parecer difícil ou obscura.

As indagações correspondentes no caso de “problemas de demonstração” são: *É possível que a proposição seja verdadeira? Ou é mais provável que ela seja falsa?* A maneira de apresentar mostra claramente que delas se espera uma estimativa, uma resposta provisória plausível.

É possível utilizar o resultado? Encontrar a solução de um problema constitui uma descoberta. Se o problema não for difícil, a descoberta não será memorável, mas não deixará de ser uma descoberta. Ao fazermos uma descoberta, por mais modesta que seja, não devemos deixar de investigar se não haverá mais alguma coisa por detrás dela, não devemos perder as possibilidades oferecidas pelo novo resultado, devemos tentar utilizar de novo o procedimento adotado. Explore o seu sucesso! *É possível utilizar o resultado, ou o método, em algum outro problema?*

1. Podemos facilmente imaginar novos problemas se estivermos familiarizados com os principais meios de variação do problema, tais como GENERALIZAÇÃO, PARTICULARIZAÇÃO, ANALOGIA, DECOMPOSIÇÃO E RECOMPOSIÇÃO. Partimos de um problema proposto, dele derivamos outros pelos meios que acabam de ser mencionados, dos problemas assim obtidos derivamos ainda outros e assim por diante. Em teoria, o processo é indefinido mas, na prática, raramente é possível levá-lo muito longe, pois os problemas que assim obtemos tendem a ser inacessíveis.

Por outro lado, podemos preparar novos problemas que possam ser facilmente resolvidos com o auxílio da solução de um problema anteriormente resolvido, mas tais novos problemas fáceis tendem a ser desinteressantes.

Não é fácil encontrar problemas que sejam, ao mesmo tempo, interessantes e acessíveis. Para isso, precisamos de experiência, discernimento e sorte. No entanto, não devemos deixar de procurar outros bons problemas quando conseguimos resolver um deles. Bons problemas e cogumelos de certas espécies têm alguma coisa em comum: eles medram em grupos. Encontrando um, olhe em torno, pois há boas probabilidades de que muito perto encontram-se outros.

2. Vamos ilustrar alguns pontos acima tratados com o auxílio do mesmo exemplo exposto nas seções 8, 10, 12, 14, 15. Assim, principiaremos com o seguinte problema:

Dada as três dimensões (comprimento, largura e altura) de um paralelepípedo retângulo, calcular a diagonal.

Se conhecermos a solução deste problema, poderemos facilmente resolver qualquer um dos problemas seguintes (dos quais os dois primeiros ficaram quase enunciados na seção 14).

Dadas as três dimensões de um paralelepípedo retângulo, calcular o raio da esfera circunscrita.

A base de uma pirâmide é um retângulo cujo centro é o pé da altura da pirâmide. Dados a altura de uma pirâmide e os lados da sua base, calcular as arestas laterais.

Dadas as coordenadas retangulares (x_1, y_1, z_1) , (x_2, y_2, z_2) de dois pontos no espaço, calcular a distância entre eles.

Resolvemos facilmente estes problemas porque eles pouco diferem do problema original, cuja solução conhecemos. Em cada caso, acrescentamos alguma noção nova ao nosso problema original, como sejam, esfera circunscrita, pirâmide, coordenadas retangulares. Tais noções são facilmente acrescentadas e facilmente eliminadas, de modo que, ao nos livrarmos delas, cairemos de volta ao nosso problema original.

Os problemas acima apresentam certo interesse porque as noções introduzidas no problema original são interessantes. O último problema, aquele da distância entre dois pontos dados por suas coordenadas retangulares, é ainda mais importante por causa da importância que têm as coordenadas retangulares.

3. Eis aqui outro problema que pode ser facilmente resolvido se conhecemos a solução do nosso problema original: dados o comprimento, a largura e a diagonal de um paralelepípedo retângulo, calcular a sua altura.

De fato, a solução do nosso problema original consiste em estabelecer a relação entre quatro grandezas: as três dimensões do paralelepípedo e a sua diagonal. Sendo dadas três quaisquer dessas quatro grandezas, poderemos calcular a quarta a partir da relação entre elas. Teremos, assim, resolvido o novo problema.

Temos aqui um modelo para obter problemas de resolução fácil a partir de problemas que já tenhamos resolvido: consideramos a incógnita do original como o dado e um dos dados originais como a incógnita. A relação que liga a incógnita aos dados é a mesma em ambos os problemas, o velho e o novo. Uma vez achada esta relação num, podemos utilizá-la também no outro.

Este modelo de derivação de novos problemas, pela troca de papéis, é muito diferente do modelo seguido no item 2.

4. Derivemos agora alguns novos problemas por outros meios.

Uma *generalização* natural do nosso problema consiste no seguinte: Calcular a diagonal de um paralelepípedo, sendo dadas as três arestas que partem de uma extremidade da diagonal e os três ângulos formados por essas arestas.

Por *particularização*, chegamos ao seguinte problema: Calcular a diagonal de um cubo de aresta dada.

Podemos ser levados por *analogia* a uma inexaurível variedade de problemas. Eis aqui uns poucos, derivados daqueles tratados no item 2: Calcular a diagonal de um octaedro regular de aresta dada; calcular o raio da esfera circunscrita a um tetraedro regular de aresta dada; dadas as coordenadas geográficas (latitude e longitude) de dois pontos da superfície da Terra (que consideramos uma esfera), calcular a sua distância esférica.

Todos estes problemas são interessantes, mas somente aquele obtido por particularização pode ser imediatamente resolvido com base na solução do problema original.

5. Podemos obter novos problemas a partir do problema proposto, se considerarmos alguns dos seus elementos como variáveis.

Um caso especial do problema mencionado no item 2 é calcular o raio de uma esfera circunscrita a um cubo cuja aresta é dada. Consideremos como fixos o cubo e o centro comum ao cubo e à esfera, mas façamos variar o raio da esfera. Se este for pequeno, a esfera ficará contida no cubo. À medida que o raio cresce, a esfera se expande (como um balão de borracha que se está enchendo). Num certo momento, a esfera toca as faces do cubo; um pouco depois, as suas arestas; mais tarde, a esfera passa pelos vértices. Quais os valores que o raio assume nestes três momentos críticos?

6. A experiência matemática do estudante estará incompleta se ele nunca tiver uma oportunidade de resolver um problema *inventado por ele próprio*. O professor pode mostrar a derivação de novos problemas a partir de um outro que acaba de ser resolvido e, assim fazendo, despertar a curiosidade de seus alunos. O professor pode, também, deixar alguma parte da invenção aos alunos. Por exemplo, ele pode descrever o caso recém-mencionado (item 5) da esfera que se expande e indagar: "O que tentaria calcular? Que valor do raio apresenta interesse particular?"

É possível verificar o resultado? É possível verificar o argumento? Uma boa resposta a estas indagações reforça a nossa confiança na solução e contribui para a solidez dos nossos conhecimentos.

1. Os resultados numéricos de problemas matemáticos podem ser verificados pela comparação com números observados ou por estimativa judiciosa de números observáveis. Como os problemas que surgem de necessidades práticas, ou da curiosidade natural, quase sempre objetivam fatos, seria de esperar que tais comparações com fatos observáveis raramente fossem omitidas. No entanto, como sabem todos os professores, os estudantes conseguem coisas incríveis a este respeito. Alguns deles não ficam, de modo algum, desconcertados quando encontram 4.839 metros para o comprimento de um navio e 8 anos e 2 meses para a idade do seu comandante, do qual se sabe, a propósito, que já é avô. Este desprezo pelo óbvio não revela, necessariamente, imbecilidade e sim indiferença para com problemas artificiais.

2. Os problemas "literais" são susceptíveis de verificações mais variadas e mais interessantes (ver seção 14). Como outro exemplo, consideremos um tronco de pirâmide de base quadrada. Se o lado da base inferior for a , o lado superior b e a altura do tronco h , encontraremos o volume

$$\frac{a^2 + ab + b^2}{3} h.$$

Podemos verificar esta fórmula por PARTICULARIZAÇÃO. De fato, se $a = b$, o tronco reduzir-se-á a um prisma e a fórmula passará a $a^2 h$. Se $b = 0$, o tronco torna-se uma pirâmide e a fórmula será $\frac{a^2}{3} h$. Podemos aplicar aí o TESTE DIMENSIONAL.

Com efeito, a expressão tem por dimensão o cubo de um comprimento. Aqui também podemos verificar a fórmula pela *variação dos dados*. De fato, se qualquer uma das quantidades positivas a , b e h aumentar, o valor da expressão também aumentará.

Testes destes tipos podem ser aplicados não só ao resultado final como a resultados intermediários. Eles são tão úteis que vale a pena preparar-se para aproveitá-los (ver VARIAÇÃO DO PROBLEMA, 4). Para utilizar tais testes, há vantagens em generalizar um "problema numérico" e transformá-lo num "problema literal" (ver GENERALIZAÇÃO, 3).

3. **É possível verificar o argumento?** Pela verificação do argumento, passo a passo, evitaremos a mera repetição. Primeiro, a simples repetição torna-se enfadonha e cansativa e não é instrutiva. Segundo, se errarmos uma provavelmente erraremos outras vezes, caso as circunstâncias forem as mesmas. Se sentirmos a necessidade de refazer, passo a passo, todo o argumento, deveremos pelo menos alterar a ordem desses passos, ou agrupá-los, para introduzir alguma variação.

4. É menos trabalhoso e mais interessante tomar o ponto mais fraco do argumento e examiná-lo em primeiro lugar. Uma indagação muito útil para a escolha daqueles pontos cujo exame valha a pena é: UTILIZOU TODOS OS DADOS?

5. Está claro que o conhecimento não-matemático não se pode basear inteiramente em demonstrações formais. A parte mais sólida do nosso conhecimento corrente é continuamente testada e reforçada pela nossa experiência cotidiana. Os testes de observação são realizados com maior sistematização nas ciências naturais. Eles tomam a forma de experiências e medições cuidadosas e são combinados com o raciocínio matemático nas ciências físicas. O nosso conhecimento matemático poderá basear-se exclusivamente em demonstrações formais?

Esta é uma questão filosófica, que não podemos debater aqui. É certo que o meu conhecimento matemático, o seu ou o dos alunos não se apóia apenas em demonstrações formais. Se houver algum conhecimento sólido, ele terá uma ampla base experimental, que se amplia a cada problema cujo resultado for verificado com sucesso.

Eis um problema correlato que já foi antes resolvido. Esta é uma boa notícia: um problema cuja solução se conhece e que é relacionado com o nosso presente problema torna-se certamente bem-vindo. Ele o será ainda mais, se a relação for íntima e a solução for simples. Há boas probabilidades de que tal problema seja útil na resolução do nosso.

A situação que aqui apresentamos é típica e importante. Para percebê-la com clareza, comparemo-la com a em que nos encontramos quando trabalhamos com um problema auxiliar. Em ambos os casos, o nosso objetivo é resolver um certo problema *A* e introduzirmos e examinarmos um outro problema *B* na esperança de que poderemos obter alguma vantagem, para a resolução do problema proposto *A*, do exame do problema *B*. A diferença está na nossa relação para com *B*. Aqui, conseguimos nos lembrar de um velho problema *B*, cuja solução conhecemos, mas não sabemos ainda como utilizá-la. Lá, conseguimos inventar um novo problema *B*, que sabemos utilizar (ou, pelo menos, disso temos fortes suspeitas), mas não sabemos ainda como resolvê-lo. A diferença entre as duas situações está na nossa dificuldade em relação a *B*. Superada esta dificuldade, poderemos utilizar *B* da mesma maneira em ambos os casos; poderemos utilizar o resultado ou o método (como se explica em PROBLEMA AUXILIAR, 3) e, se tivermos sorte, poderemos utilizar tanto o resultado quanto o método. Na situação aqui considerada, conhecemos bem a solução de *B* mas não sabemos ainda como utilizá-la. Portanto, indagamos: *É possível utilizar o seu resultado? É possível utilizar o seu método?*

A intenção de utilizar um problema já antes resolvido influencia a nossa concepção do presente problema. Na tentativa de relacionar os dois problemas, o velho e o novo, introduzimos no novo, elementos que correspondam a certos importantes elementos do velho. Seja o nosso problema, determinar a esfera circunscrita a um da-

do tetraedro. Trata-se de um problema de Geometria Espacial. Podemos nos lembrar de que já resolvemos anteriormente o problema análogo de Geometria Plana que consiste em traçar um círculo circunscrito a um dado triângulo. Lembramo-nos, então, de que, no velho problema de Geometria Plana, havíamos utilizado perpendiculares, bissetrizes dos lados do triângulo. É razoável tentar a introdução de algo semelhante no presente problema. Isto poderá nos levar a introduzir, como elementos auxiliares correspondentes, planos perpendiculares bissetores das arestas do tetraedro. Esta idéia nos facilitará a resolução do problema de Geometria Espacial pela resolução análoga do problema de Geometria Plana.

O exemplo citado é típico. A consideração de um problema anteriormente resolvido nos leva à introdução de elementos auxiliares adequados, os quais nos permitem utilizar, com toda a vantagem, o problema auxiliar na resolução do nosso presente problema. Procuramos este efeito quando, pensando na possível utilização de um problema correlato já antes resolvido, indagamos: *Deve-se introduzir algum elemento auxiliar para possibilitar a sua utilização?*

Eis um teorema correlato que já foi antes demonstrado. Esta versão da observação aqui tratada está exemplificada na seção 19.

Elementos auxiliares. A nossa concepção do problema é mais ampla no fim do trabalho do que no princípio (PROGRESSO E CONSECUÇÃO, 1). À medida que progride o trabalho, acrescentamos novos elementos àqueles originalmente considerados. Um elemento que introduzimos na esperança de que ele venha a facilitar a resolução é chamado de *elemento auxiliar*.

1. Há elementos auxiliares de vários tipos. Ao resolvermos um problema geométrico, podemos acrescentar novas linhas à figura, *linhas auxiliares*. Ao resolvermos um problema algébrico, podemos adotar uma *incógnita auxiliar* (PROBLEMA AUXILIAR, 1). *Teorema auxiliar* é aquele cuja demonstração empreendemos na esperança de facilitar a resolução do nosso problema original.

2. Há diversos motivos para a introdução de elementos auxiliares. Ficamos satisfeitos quando conseguimos relembrar um *problema correlato que já foi antes resolvido*. É provável que possamos utilizar um tal problema, mas ainda não sabemos como. Por exemplo, o que estamos tentando resolver é um problema geométrico e o problema correlato, que já foi antes por nós resolvido, e que agora conseguimos relembrar, refere-se a triângulos. No entanto, não aparece nenhum triângulo na nossa figura; para fazermos qualquer uso do problema relembrado teremos de ter um triângulo; por conseguinte, precisamos introduzir um, acrescentando linhas auxiliares adequadas à figura. De modo geral, tendo recordado um problema anteriormente resolvido e desejando utilizá-lo no problema atual, precisamos muitas vezes indagar: *Devemos introduzir um elemento auxiliar a fim de possibilitar sua utilização?* (O exemplo da seção 10 é típico).

Voltando às definições, teremos uma outra oportunidade de introduzir elementos auxiliares. Por exemplo, para explicar a definição do círculo devemos não só mencionar o centro e o raio, como também introduzir estes elementos geométricos na figura. Sem isto, não poderemos fazer qualquer uso concreto da definição. Não basta o enunciado da definição, é preciso desenhar as coisas definidas.

As tentativas de utilizar resultados conhecidos e a volta às definições estão entre os melhores motivos para introduzir elementos auxiliares, mas não são os únicos. Podemos acrescentar elementos auxiliares à nossa concepção do problema a fim de torná-la mais rica, mais sugestiva, mais familiar, muito embora mal saibamos como utilizar os elementos introduzidos. É possível que pensemos que a concepção do problema dessa forma, com tais e tais elementos acrescentados, seja uma "idéia brilhante".

O motivo para a introdução de um elemento auxiliar poderá ser este ou aquele, mas precisamos ter um motivo. Não devemos introduzir injustificadamente qualquer elemento auxiliar.

3. *Exemplo.* Construir um triângulo sendo dados um ângulo, a altura traçada a partir do vértice do ângulo dado e o perímetro do triângulo.

Adotamos uma *notação adequada*. Sejam α o ângulo dado, h a altura dada a partir do vértice A de α e p o perímetro dado. *Traçamos uma figura* na qual situamos com facilidade α e h . *Utilizamos todos os dados?* Não, a figura não indica o perímetro dado p , que deverá ser igual ao perímetro do triângulo. Por conseguinte, teremos de introduzir p . Como fazê-lo?

Podemos tentar introduzir p de várias maneiras. As tentativas mostradas nas figuras 15 e 16 parecem desajeitadas. Se tentarmos esclarecer a nós próprios porque elas parecem tão insatisfatórias, poderemos perceber que lhes falta simetria.

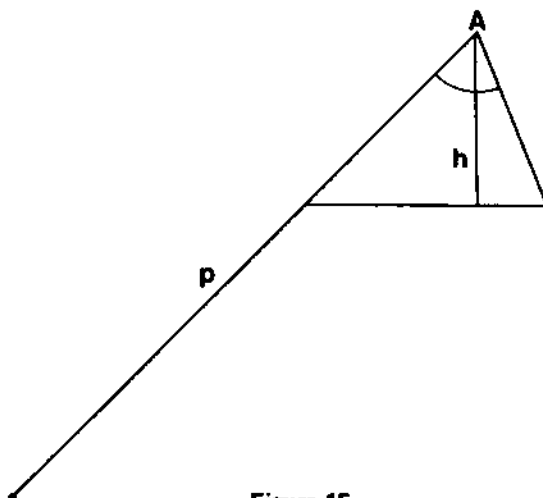


Figura 15

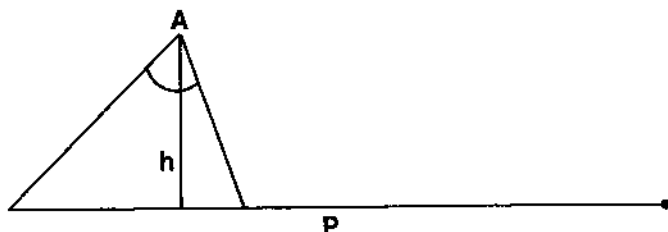


Figura 16

De fato, o triângulo tem três lados desconhecidos, a , b e c . Chamamos de a , como é habitual, o lado oposto a A . Sabemos que

$$a + b + c = p.$$

Ora, os lados b e c desempenham o mesmo papel; eles são intercambiáveis; o nosso problema é simétrico em relação a b e c . Mas b e c não desempenham papéis idênticos nas figuras 9 e 10; ao acrescentarmos p , tratamos b e c diferentemente; essas figuras estragam a simetria natural do problema com referência a b e c . Devemos colocar p de tal maneira que ele mantenha a mesma relação com b e com c . Esta consideração poderá ser útil por sugerir a colocação de p como se vê na figura 17. Acrescentamos ao lado a do triângulo o segmento CE , de comprimento b , para um lado e o segmento BD , de comprimento c , para o outro lado, de modo a que p apareça na figura 17 como a linha ED de comprimento

$$b + a + c = p.$$

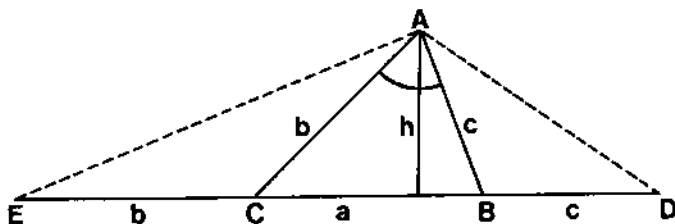


Figura 17

Se já tivermos experiência em resolver problemas de construção geométrica, não deixaremos de introduzir na figura, juntamente com ED , as linhas auxiliares AD e AE , cada uma das quais é a base de um triângulo isósceles. De fato, não é despropositado introduzir, no problema, elementos particularmente simples e familiares, como o triângulo isósceles.

Tivemos sorte em acrescentar as linhas auxiliares. Pelo exame da nova figura, podemos verificar que $\angle EAD$ mantém uma relação simples com o ângulo dado α . De fato, utilizando os triângulos isósceles $\triangle ABD$ e $\triangle ACE$, verificamos que $\angle DAE = \frac{\alpha}{2} + 90^\circ$. Depois desta observação, é natural tentar construir $\triangle DAE$ e assim introduzimos um problema auxiliar que é muito mais fácil do que o problema original.

4. Os professores e os autores de livros didáticos não devem esquecer que estudante inteligente e o LEITOR INTELIGENTE não se satisfazem em verificar que os passos do raciocínio estão corretos, mas desejam também conhecer a motivação e a finalidade dos vários passos. A introdução de um elemento auxiliar constitui um passo notável. Se uma linha auxiliar surgir abruptamente na figura, sem qualquer motivação, e surpreendentemente resolver o problema, os estudantes e leitores inteligentes ficarão decepcionados, sentir-se-ão burlados. A Matemática é interessante na medida em que ocupa as nossas faculdades de raciocínio e de invenção. Mas nada se aprenderá sobre raciocínio ou invenção se a motivação e a finalidade do passo mais notável permanecer incompreensível. Tornar tais passos compreensíveis por meio de observações apropriadas (como no item 3, acima) ou de indagações e sugestões cuidadosamente escolhidas (como nas seções 10, 18, 19, 20) exige muito tempo e esforço, mas pode valer a pena.

Enigmas. Conforme ficou dito na seção 3, as indagações e sugestões da nossa relação independem do assunto e se aplicam a qualquer tipo de problema. Seria interessante verificar esta afirmativa aplicando-a enigmas diversos.

Tomem-se, por exemplo, as palavras

MEXER NA ROTINA DIRETA.

O problema consiste em encontrar um "anagrama", isto é, uma outra palavra formada por um rearranjo das letras contidas nas palavras dadas. É interessante observar que, para resolver este enigma, diversas das perguntas da nossa lista são aplicáveis e, mesmo, estimulantes.

Qual é a incógnita? Uma palavra.

Quais são os dados? As quatro palavras MEXER NA ROTINA DIRETA.

Qual é a condicionante? A palavra procurada tem dezenove letras, as que formam as quatro palavras dadas. Trata-se, provavelmente, de uma palavra que não é muito rara.

Trace uma figura. É bem útil marcar dezenove espaços em branco

É possível reformular o problema? Temos de encontrar uma palavra formada pelas seguintes letras, dispostas de alguma maneira:

AAEEEEIO DMNNRRRTTX.

Esta é, de fato, uma reformulação do problema apresentado, que pode apresentar vantagens (ver PROBLEMA AUXILIAR, 6). Ao separarmos as vogais das consoantes (isto é importante, a ordem alfabética não o é) vislumbramos um novo aspecto do problema. Assim, vemos agora que a palavra procurada tem nove sílabas, a menos que contenha algum ditongo.

Se não puder resolver o problema proposto, procure primeiro resolver algum problema correlato. Um problema correlato seria formar palavras usando apenas algumas das letras dadas. É certamente possível formar assim palavras curtas. Em seguida, tentaríamos palavras cada vez mais compridas. Quanto mais letra usarmos, mais nos aproximaremos da palavra procurada.

É possível resolver parte do problema? A palavra procurada é tão comprida que ela deve conter partes distintas. Provavelmente se trata de uma palavra composta ou derivada de uma outra pelo acréscimo de um sufixo corrente. Qual poderá ser esse sufixo corrente?

----- MENTE.

Mantenha apenas uma parte da condicionante e deixe a outra de lado. Podemos pensar numa palavra longa que contenha até nove sílabas e relativamente poucas consoantes, uma das quais é a letra X.

As indagações e sugestões da nossa lista não podem fazer milagres. Elas não nos podem fornecer soluções para todos os enigmas possíveis sem que haja algum esforço de nossa parte. Se o leitor desejar encontrar a palavra, ele que continue a tentar e a pensar nela. O que as indagações e sugestões podem fazer é "manter a bola em jogo". Quando, desanimados pelo insucesso, ficamos inclinados a abandonar o problema, elas poderão indicar uma nova tentativa, um novo aspecto, uma nova variante do problema, um novo estímulo: elas poderão nos manter a pensar.

Por outro exemplo semelhante, ver DECOMPOSIÇÃO E RECOMPOSIÇÃO, 8.

Equacionamento é como tradução de uma língua para outra (ver NOTAÇÃO, 1). Esta comparação, usada por Newton na sua *Arithmetica Universalis*, pode contribuir para esclarecer a natureza de certas dificuldades muitas vezes encontradas, tanto por estudantes como por professores.

1. Equacionar significa expressar por símbolos matemáticos uma condicionante que está formulada por palavras; é a tradução da linguagem corrente para a linguagem das fórmulas matemáticas. As dificuldades que podem surgir no equacionamento são dificuldades de tradução.

Para traduzir uma frase do inglês para o português, duas coisas são necessárias. Primeiro, precisamos compreender integralmente a frase inglesa. Segundo, precisamos estar familiarizados com as formas de expressão peculiares à língua portuguesa. A situação é muito semelhante quando tentamos expressar por meio de símbolos matemáticos uma condicionante proposta em palavras. Primeiro, precisamos compreender integralmente a condicionante. Segundo, precisamos estar familiarizados com as formas de expressão matemática.

Uma frase do inglês será muito fácil de traduzir para o português se ela puder ser trasladada palavra por palavra. Mas há expressões idiomáticas inglesas que não podem ser traduzidas literalmente para o português. Se a nossa frase contém tais expressões, a tradução torna-se difícil; temos de prestar menos atenção a cada palavra e mais ao significado inteiro; antes de traduzir a frase, podemos precisar rearrumá-la.

O que ocorre no equacionamento é muito semelhante. Em casos simples, o enunciado verbal divide-se, quase automaticamente, em partes sucessivas, cada uma das quais pode ser escrita em símbolos matemáticos. Em casos mais difíceis, a condicionante contém partes que não podem ser imediatamente traduzidas por símbolos matemáticos. Quando isto ocorre, precisamos prestar menos atenção ao enunciado verbal e concentrarmo-nos em seu significado. Antes de começarmos, precisamos reformular a condicionante, levando em conta, ao fazê-lo, os recursos de que dispõe a notação matemática.

Em qualquer caso, fácil ou difícil, precisamos compreender a condicionante, separar as suas várias partes e indagar: *Pode anotá-las por escrito?* Nos casos fáceis, conseguimos sem dificuldade dividir a condicionante em partes que podem ser escritas em símbolos matemáticos; nos casos difíceis, a divisão adequada da condicionante torna-se menos óbvia.

A explicação precedente deve ser relida depois do estudo dos exemplos seguintes.

2. Encontrar dois números cuja soma é 78 e cujo produto é 1 296.

Dividimos a página ao meio por uma linha vertical. Num dos lados escrevemos o enunciado verbal, dividido em partes apropriadas. No outro, escrevemos signos algébricos, opostos às partes correspondentes do enunciado verbal. O original fica à esquerda; a tradução em símbolos, à direita.

Formulação do problema

em linguagem corrente	em linguagem algébrica
Encontrar dois números	x, y
cujas soma seja 78 e	$x + y = 78$
cujos produto seja 1 296	$xy = 1\,296$

Neste caso, o enunciado verbal divide-se, quase automaticamente, em partes sucessivas, cada uma das quais pode ser imediatamente escrita em símbolos matemáticos.

3. *Calcular a largura e a altura de um prisma reto, de base quadrada, sendo dados o volume, 63 cm^3 , e a área da superfície, 102 cm^2 .*

Quais são as incógnitas? O lado da base, seja x , e a altura do prisma, seja y .

Quais são os dados? O volume, 63, e a área, 102.

Qual é a condicionante? O prisma cuja base é um quadrado de lado x e cuja altura é y deve ter o volume 63 e a área 102.

Separe as diversas partes da condicionante. Há duas partes; uma relativa ao volume; outra, à área.

Não há que hesitar em dividir toda a condicionante exatamente nestas duas partes, mas não podemos escrever tais partes "imediatamente". Precisamos saber como calcular o volume e as várias partes da área. No entanto, se o nosso conhecimento de Geometria chegar até aí, podemos facilmente reformular ambas as partes da condicionante, de modo a tornar viável a sua tradução em equações. Escrevemos ao lado esquerdo da página um enunciado do problema, essencialmente rearrumado e ampliado, pronto para ser traduzido em linguagem algébrica.

De um prisma reto de base quadrada,	
calcular o lado da base	x
e a altura.	y
Primeiro. É dado o volume.	63
A área da base, que é um quadrado de lado x ,	x^2
e a altura	y
determinam o volume,	
que é o seu produto.	$x^2 y = 63$
Segundo. É dada a área da superfície.	102
A superfície consiste em dois quadrados de lado x	$2x^2$
e quatro retângulos, cada um de base x e altura y .	$4xy$
cuja soma é a respectiva área.	$2x^2 + 4xy = 102.$

4. *Dadas a equação de uma reta e as coordenadas de um ponto, determinar um outro ponto que seja simétrico ao ponto dado em relação à reta dada.*

Trata-se de um problema de Geometria Analítica plana.

Qual é a incógnita? Um ponto, sejam p, q , suas coordenadas.

Quais são os dados? A equação de uma reta, seja $y = mx + n$, e um ponto, sejam a, b as suas coordenadas.

Qual é a condicionante? Os pontos (a, b) e (p, q) são simétricos em relação à reta $y = mx + n$.

Chegamos agora à dificuldade essencial, que é dividir a condicionante em partes que possam, todas elas, ser expressas na linguagem da Geometria Analítica. A natureza desta dificuldade deve ser bem compreendida. A decomposição da condicionante em partes pode ser logicamente aceitável e, no entanto, inútil. O que precisamos aqui é de uma decomposição em partes que possam ser expressas analiticamente. Para encontrar uma tal decomposição, precisamos *voltar à definição* de simetria, mas sem perder de vista os recursos da Geometria Analítica. Que quer dizer simetria em relação a uma reta? Quais as relações geométricas que podemos expressar simplesmente pela Geometria Analítica? Concentramo-nos na primeira pergunta, mas não devemos esquecer a segunda. Deste modo, poderemos chegar, finalmente, à decomposição que passamos a enunciar.

O ponto dado
e o ponto pedido
estão de tal modo relacionados que,
primeiro, a linha que os liga
é perpendicular à linha dada e,
segundo, o ponto médio da linha
que os liga está sobre a reta dada.

(a, b)

(p, q)

$$\frac{q - b}{p - a} = -\frac{1}{m}$$

$$\frac{b + q}{2} = m \frac{a + p}{2} + n$$

Examine a sua suposição. A sua suposição pode estar correta, porém, por mais forte que ela seja, seria tolice aceitá-la como uma verdade comprovada, como o fazem os primitivos. Ela pode estar errada. Mas seria outra tolice desprezar inteiramente uma viva suposição — como os pedantes às vezes fazem. Há certas suposições que merecem ser examinadas e levadas a sério: aquelas que nos ocorrem depois de realmente compreendido e atentamente examinado um problema no qual estamos sinceramente interessados. Estas, em geral, contêm pelo menos um fragmento da verdade, embora, é evidente, muito raramente revelem toda a verdade. No entanto, há possibilidades de extrair toda a verdade se examinarmos adequadamente uma tal conjectura.

Muitas suposições revelam-se erradas e, não obstante, foram úteis para conduzir a uma outra melhor.

Nenhuma idéia é inteiramente má, a menos que não se tenha espírito crítico. O que é realmente mau é não ter nenhuma idéia.

1. *O que não se deve fazer.* Eis uma estória crítica a respeito de um certo sr. Silva, que trabalha para uma determinada companhia. Ele contava com um pequeno aumento de salário, mas a sua esperança, como tantas vezes ocorre com as esperanças, não se concretizou. Os salários de alguns de seus colegas foram aumentados, mas não o seu. O sr. Silva não pôde aceitar isso calmamente e começou a se preocupar, até que, finalmente, suspeitou de que o Diretor Sousa era o responsável por não ter ele sido aumentado.

Não podemos censurar o sr. Silva por conceber uma tal suspeita, pois alguns indícios apontavam para o Diretor Sousa. O erro real estava em que, depois de ter a suspeita, o sr. Silva ficou como que cego para todos os outros indícios que apontavam para uma direção diferente. Na sua preocupação, ele passou a acreditar firmemente que o Diretor Sousa era seu inimigo pessoal e quase conseguiu torná-lo seu inimigo real.

O problema com o sr. Silva é que ele se comporta como a maioria das pessoas. Ele nunca muda as suas opiniões maiores. Muda com frequência e repetidamente as suas opiniões menores, mas nunca duvida de suas opiniões, maiores ou menores, enquanto as mantiver. Ele nunca duvida delas, nem as questiona, nem as examina com espírito crítico — ele odiaria particularmente o exame crítico, se compreendesse o que isto quer dizer.

Admitamos que, até certo ponto, o sr. Silva esteja certo. Ele é um homem ocupado, que tem seus afazeres no escritório e em casa. Portanto, dispõe de pouco tempo para duvidar ou examinar. O melhor que ele poderia fazer seria examinar apenas umas poucas de suas convicções, mas por que duvidar de uma delas, se ele não tem tempo para examinar essa dúvida?

Seja como for, não faça como o sr. Silva. Não permita que a sua suspeita, ou suposição, ou conjectura cresça até se tornar inerradicável. De qualquer maneira, em questões teóricas, as melhores idéias são prejudicadas pela aceitação sem crítica e melhoram com o exame crítico.

2. *Um exemplo matemático.* De todos os quadriláteros de um dado perímetro, qual aquele que tem a maior área?

Qual é a incógnita? Um quadrilátero.

Quais são os dados? É dado o perímetro do quadrilátero.

Qual é a condicionante? A área do quadrilátero procurado deverá ser maior do que a de qualquer outro quadrilátero que tenha o mesmo perímetro.

Este problema é muito diferente daqueles que aparecem habitualmente na Geometria elementar e, portanto, é muito natural que comecemos a conjecturar.

Qual o quadrilátero que apresenta mais probabilidades de ser o de maior área? Qual seria a suposição mais simples? É possível que já tenhamos ouvido que, de todas as figuras de mesmo perímetro, de maior área é o círculo e podemos mes-

mo suspeitar de alguma razão para esta afirmativa. Ora, qual é o quadrilátero que mais se assemelha ao círculo? Qual aquele que mais se assemelha a este em simetria?

O quadrado é uma suposição bem óbvia. Se tomamos a sério esta suposição, precisamos compreender o que ela significa. Devemos ter a coragem de enunciá-la: "De todos os quadriláteros de um dado perímetro, o quadrado é aquele que tem a maior área". Se nos decidimos a examinar esta afirmativa, a situação muda de figura. Tínhamos originalmente um "problema de determinação". Depois de formular a nossa suposição, passamos a ter um "problema de demonstração". Cabe-nos agora demonstrar ou refutar o teorema formulado.

Se não conhecermos nenhum problema semelhante a este e que já tenha sido antes resolvido, poderemos encontrar sérias dificuldades na nossa tarefa. *Se não puder resolver o problema proposto, procure antes resolver um problema correlato. É possível resolver uma parte do problema?* Pode-nos ocorrer que, se o quadrado é privilegiado entre os quadriláteros, ele deverá também, por isto mesmo, ser privilegiado entre os retângulos. Uma parte do nosso problema poderia ser resolvida se pudéssemos demonstrar o seguinte enunciado: "De todos os retângulos de um dado perímetro, o quadrado é aquele que tem a maior área".

Este problema parece mais acessível que o anterior; ele é, evidentemente, mais fraco. De qualquer modo, devemos compreender o seu significado; devemos ter a coragem de reformulá-lo com maiores detalhes. Podemos reformulá-lo em linguagem algébrica.

A área de um retângulo cujos lados adjacentes são a e b é ab . O seu perímetro é $2a + 2b$.

O lado do quadrado que tem o mesmo perímetro que o retângulo mencionado é $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$. Ele deve ser maior do que a área do retângulo e, portanto, teremos

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 > ab.$$

Será isto verdadeiro? A mesma afirmativa pode ser expressa sob a forma equivalente

$$a^2 + 2ab + b^2 > 4ab.$$

Isto, porém, é verdadeiro, pois equivale a

$$a^2 - 2ab + b^2 > 0,$$

ou seja,

$$(a - b)^2 > 0$$

e esta desigualdade será certamente válida, a menos que $a = b$, isto é, que o retângulo em questão seja um quadrado.

Não resolvemos ainda o nosso problema, mas fizemos algum progresso simplesmente por termos enfrentado firmemente a nossa suposição, que era bem óbvia.

3. *Um exemplo não-matemático.* Num certo jogo de palavras cruzadas, precisamos procurar uma palavra de sete letras, cuja chave é: "Num sentido ou noutro, é existir de novo".

Qual é a incógnita? Uma palavra.

Quais são os dados? É dado o tamanho da palavra: sete letras.

Qual é a condicionante? Está enunciada na chave. Tem algo a ver com existir, mas tudo está ainda muito nebuloso.

Temos, assim, de reexaminar a chave. Ao fazermos isso, a última parte pode atrair a nossa atenção: "... de novo". *É possível resolver uma parte do problema?* Está aí uma chance de presumir o início da palavra. Como é destacada a idéia de repetição, possivelmente ela começaria por "re". Esta é uma suposição bem óbvia. Se estivermos tentados a acreditar nela, deveremos perceber o que significa. A palavra procurada apareceria assim:

RE _ _ _ _

É possível verificar o resultado? Se uma outra palavra do jogo cruzar com a palavra em consideração na primeira letra, teremos um *R* para começar esta outra palavra. Pode ser uma boa idéia passar para essa outra palavra e verificar o *R*. Se conseguirmos confirmar que *R* satisfaz, ou pelo menos nada tivermos contra, voltaremos à nossa palavra original. *Perguntamos outra vez: Qual é a condicionante?* Ao reexaminarmos a chave, a sua primeira parte poderá despertar a nossa atenção: "Num sentido ou noutro..." Significaria isto que a palavra pode ser lida não só da frente para trás como de trás para diante? Esta é uma suposição menos óbvia (no entanto, há destes casos, ver DECOMPOSIÇÃO E RECOMBINAÇÃO, 8).

De qualquer modo, enfrentemos a nossa suposição, percebamos o que significa. A palavra apareceria assim:

RE _ _ _ ER.

Além disso, a terceira letra deverá ser a mesma que a quinta. É muito provável que ela seja uma consoante e que a quarta letra, a do meio, seja uma vogal.

O leitor poderá agora encontrar a palavra por si próprio. Se nada mais lhe for de auxílio, ele poderá ensaiar todas as vogais, uma por uma, para a letra do meio.

Execução do plano. Conceber um plano e executá-lo são duas coisas distintas. Num certo sentido, isto é também verdadeiro no que se refere a problemas matemá-

ticos: entre conceber o plano da resolução e executá-lo, há certas diferenças no caráter das atividades respectivas.

1. No preparo de um argumento final e rigoroso, podemos usar argumentos provisórios e apenas plausíveis, da mesma maneira que se usam formas para suportar uma estrutura durante a construção. Quando, porém, os trabalhos estiverem suficientemente adiantados, retiram-se as formas e a estrutura deverá ser capaz de sustentar-se por si própria. Da mesma maneira, quando o processo de resolução estiver suficientemente adiantado, abandonamos os argumentos provisórios e apenas plausíveis e o resultado deverá ficar apoiado somente pelo argumento rigoroso.

Na concepção do plano de resolução, não devemos temer muito o raciocínio heurístico, que é apenas plausível. Tudo estará certo, desde que nos conduza à idéia certa. Mas precisamos mudar este ponto de vista quando iniciamos a execução do plano e, aí, somente devemos aceitar os argumentos conclusivos e rigorosos. *Na execução do seu plano de resolução, verifique cada passo. É possível ver com clareza se o passo é certo?*

Quanto mais cuidadosamente verificarmos nossos passos na execução do plano, tanto mais livremente poderemos utilizar o raciocínio heurístico na sua concepção.

2. Devemos conceder alguma atenção à ordem de preparação dos detalhes do nosso plano, particularmente se o problema for complexo. Não devemos omitir nenhum detalhe, mas sim perceber a relação que há entre os detalhes que nos surgem e o problema como um todo; não devemos perder de vista a conexão entre os passos principais. Por conseguinte, devemos prosseguir de acordo com uma ordem apropriada.

Em particular, não seria razoável verificar detalhes menores antes de termos boas razões para crer na correção dos passos principais do argumento. De qualquer maneira, se houver uma ruptura da linha principal do argumento, a verificação deste ou daquele pormenor secundário será inútil.

A ordem de preparação dos detalhes do argumento pode ser muito diferente da ordem da sua invenção e a ordem da sua apresentação definitiva pode ser ainda diferente das duas. Os *Elementos* de Euclides apresentam os detalhes do argumento segundo uma ordem sistemática e rígida, que tem sido muito imitada e muito criticada.

3. Na exposição euclidiana, todos os argumentos caminham num mesmo sentido: dos dados para a incógnita, nos "problemas de determinação", e da hipótese para a conclusão, nos "problemas de demonstração". Qualquer novo elemento, ponto, linha etc. tem de ser corretamente deduzido a partir dos dados ou dos passos anteriores. Qualquer nova afirmativa tem de ser corretamente demonstrada a partir da hipótese ou de passos anteriores. Cada novo elemento, cada nova afirmativa, deve ser examinado logo que aparecer e, portanto, tem de ser examinado uma única vez. Podemos assim concentrar toda a atenção no presente passo, sem necessidade de olhar para trás nem para diante. O último elemento novo que temos de verificar é a incógnita. A última afirmativa cuja demonstração temos de verificar é a conclusão.

Se todos os passos estiverem corretos, inclusive o último, todo o argumento também o estará.

A maneira euclidiana de expor pode ser muito recomendável, sem restrições, se a finalidade for o exame detalhado do argumento. Em particular, se o argumento for nosso, se ele for longo e complicado e se o tivermos não só encontrado mas também analisado de modo geral, de tal maneira que nada reste a não ser o exame de cada um dos pontos particulares, então nada será melhor do que apresentar o argumento todo segundo a maneira euclidiana.

A exposição euclidiana não pode, porém, ser recomendada sem reservas se a finalidade for apresentar um argumento a um leitor, ou ouvinte, que nunca haja ouvido falar dele. Ela é excelente para mostrar cada ponto particular, mas já não será tão apropriada para revelar a linha principal do argumento. O LEITOR INTELIGENTE pode facilmente ver que todos os passos estão corretos, mas terá grande dificuldade em perceber a origem, o objetivo, a conexão do argumento inteiro. A razão desta dificuldade está em que a ordem seguida na exposição euclidiana muitas vezes é exatamente a inversa da ordem natural da invenção. A exposição euclidiana obedece rigorosamente à ordem da "síntese" (ver PAPPUS, especialmente os comentários dos itens 3, 4, 5).

4. Em suma, a maneira euclidiana de exposição, avançando inexoravelmente dos dados para a incógnita, ou da hipótese para a conclusão, é perfeita para verificar detalhadamente o argumento, mas está longe da perfeição quando se trata de tornar compreensível a linha principal desse argumento.

É muito de desejar que os estudantes examinem os seus próprios argumentos à maneira euclidiana, partindo dos dados para a incógnita e verificando cada passo, embora nada disso lhes deva ser exigido com muito rigor. Não é desejável que o professor apresente muitas demonstrações de maneira puramente euclidiana, embora esta possa vir a ser muito útil após uma discussão, na qual, como se recomenda no presente livro, os alunos, sob a orientação do professor, descubram, tanto quanto possível por si próprios, a idéia principal da resolução. Também parece bom o modo adotado em certos livros didáticos, nos quais primeiro é apresentado um bosquejo da idéia geral, seguido dos detalhes expostos na ordem euclidiana.

5. Desejando convencer-se da sua proposição, o matemático procura vê-la intuitivamente e dar-lhe uma demonstração formal. *É possível perceber claramente que ela é correta? É possível demonstrar que ela é correta?* O matemático consciencioso age nesse aspecto como uma senhora conscienciosa em suas compras. Desejando certificar-se da qualidade de um tecido, ela quer vê-lo e tocá-lo. A intuição e a demonstração formal são duas maneiras de perceber a verdade, comparáveis à percepção de um objeto material por meio de dois sentidos diferentes: a vista e o tato.

A intuição pode correr muito adiante da demonstração formal. Qualquer estudante inteligente, mesmo sem conhecimento sistemático da Geometria Espacial, é capaz de perceber, assim que houver entendido claramente os termos, que duas pa-

raíais a uma terceira são paralelas entre si (as três retas poderão estar ou não num mesmo plano). No entanto, a demonstração deste enunciado, tal como aparece na **Proposição 9, do Livro XI, dos *Elementos* de Euclides**, precisa de uma preparação longa, cuidadosa e engenhosa.

O manejo formal de regras lógicas e de fórmulas algébricas pode ir muito àdianta da intuição. Quase todos podem ver imediatamente que 3 retas, tomadas ao acaso, dividem o plano em 7 partes (repare na única parte finita, o triângulo formado pelas três linhas). Quase ninguém é capaz de perceber, mesmo concentrando ao máximo a atenção, que 5 planos, tomados ao acaso, dividem o espaço em 26 partes. No entanto, é possível demonstrar rigorosamente que o número exato é mesmo 26 e que a demonstração não é sequer longa ou difícil.

Na execução do nosso plano, verificamos cada passo. Ao fazê-lo, contamos com a intuição ou com a demonstração formal. Algumas vezes a intuição vai adiante, outras vai a demonstração formal. Fazer as coisas das duas maneiras constitui um exercício interessante e instrutivo. *É possível perceber claramente que o passo é correto?* Sim, posso ver isto com clareza e nitidez, mas o raciocínio formal pode chegar a alcançá-lo? *É possível também DEMONSTRAR que ele é correto?*

Tentar demonstrar formalmente aquilo que é percebido intuitivamente e perceber intuitivamente aquilo que é demonstrado formalmente constitui um estimulante exercício mental. Infelizmente, em aula nem sempre se dispõe de tempo para isso. O exemplo exposto nas seções 12 e 14 é típico deste procedimento.

Figuras são, não apenas o objeto dos problemas geométricos, como também um importante auxílio para problemas de todos os tipos, que nada apresentam de geométrico na sua origem. Temos, assim, dois bons motivos para considerar a função das figuras na resolução de problemas.

1. Se o nosso for um problema geométrico, teremos de considerar uma figura, que pode estar em nossa imaginação ou ser desenhada no papel. Em certas ocasiões, será melhor imaginar a figura sem desenhá-la. Mas se tivermos de examinar vários detalhes, um após outro, será desejável *traçar uma figura*. Se os detalhes forem numerosos, não poderemos imaginá-los todos simultaneamente, mas eles estarão todos juntos sobre o papel. Um detalhe visualizado em nossa imaginação pode ser esquecido, mas o mesmo detalhe desenhado no papel aí permanece, de tal maneira que, quando a ele voltamos, relembremos as observações anteriores, com isto nos poupando tempo e trabalho.

2. Passemos agora a considerar mais especificamente o emprego de figuras nos problemas de construção geométrica.

Começamos a consideração detalhada de tais problema pelo traçado de uma figura que contenha a incógnita e os dados, todos estes elementos dispostos como determina a condicionante do problema. Para compreender claramente o proble-

ma, temos de considerar separadamente cada dado e cada parte da condicionante. Em seguida, reunimos todas essas partes e consideramos a condicionante como um todo, procurando ver simultaneamente as várias conexões exigidas no problema. Difícilmente seremos capazes de tratar, separar e recombina todos esses detalhes sem uma figura sobre o papel.

Por outro lado, antes de termos resolvido o problema, permanece a dúvida se aquela figura pode ser desenhada. É possível satisfazer toda a condicionante imposta pelo problema? Não podemos dizer sim, antes de chegarmos à solução definitiva. Não obstante, começamos por presumir uma figura na qual a incógnita esteja ligada aos dados da maneira prescrita pela condicionante. Pode parecer que, traçando a figura, fazemos uma suposição injustificada.

Não necessariamente. Não agimos incorretamente quando, ao examinarmos o problema, considerarmos a *possibilidade* de haver um objeto que satisfaça a condicionante imposta à incógnita e que mantenha, com todos os dados, as relações exigidas, desde que não confundamos a simples possibilidade com a certeza. Um juiz não age incorretamente quando, ao questionar um réu, considera a hipótese de que este cometeu o crime em questão, desde que ele não se comprometa com esta hipótese. Tanto o matemático como o juiz podem examinar a possibilidade sem preconceito, adiando o seu julgamento para quando o exame da questão tiver fornecido algum resultado definitivo.

O método pelo qual se inicia o exame de um problema geométrico pelo traçado de uma figura em que, por suposição, a condicionante é satisfeita, remonta aos *geômetras gregos*. Ele é indicado pela frase curta e algo enigmática de Pappus: *Admita que o necessário já foi feito*. A recomendação seguinte é menos sucinta, porém mais clara: *Trace uma figura hipotética que suponha a condicionante do problema satisfeita em todas as suas partes*.

Esta é uma recomendação aplicável a problemas de Geometria, mas não precisamos restringir-nos a qualquer tipo particular de problema, podemos estendê-la a todos os "problemas de determinação", enunciando-a da seguinte forma genérica: *Examine a situação hipotética na qual se admite que a condicionante é plenamente satisfeita*.

Compare com PAPPUS, 6.

3. Tratemos agora de alguns pontos referentes ao próprio desenho das figuras.

(1) Devemos traçar as figuras com exatidão ou só aproximadamente, com instrumentos ou a mão livre?

Ambos os casos apresentam suas vantagens. As figuras exatas, em princípio, desempenham, na Geometria, as mesmas funções desempenhadas na Física pelas medições. Mas, na prática, a exatidão das figuras é menos importante do que as leis da Física. O principiante deverá, porém, desenhar muitas figuras com toda a exatidão possível para adquirir uma boa base experimental. Além disso, as figuras exatas po-

dem também sugerir teoremas geométricos àqueles mais adiantados. No entanto, para fins de raciocínio, as figuras cuidadosamente traçadas a mão livre são geralmente satisfatórias e podem ser feitas com muito maior rapidez. É evidente que a figura não deverá parecer absurda: as linhas retas não deverão ser sinuosas nem os pretensos círculos apresentar o aspecto de batatas.

Uma figura inexata pode ocasionalmente indicar uma falsa conclusão, mas este risco não é grande e há vários meios de nos protegermos dele, particularmente fazendo variar a figura. Não haverá nenhum perigo se nos concentrarmos nas conexões lógicas e percebermos que a figura é um auxílio, nunca a base das nossas conclusões. As conexões lógicas constituem a base real. [Este ponto é ilustrado de modo instrutivo por certos conhecidos paradoxos que aproveitam habilmente a inexatidão intencional da figura.]

(II) É importante que os elementos sejam reunidos com as necessárias correlações, mas a ordem da sua colocação é irrelevante. Portanto, escolha a ordem mais conveniente. Para ilustrar a idéia da triseção, deseja-se traçar dois ângulos, α e β , tais que $\alpha = 3\beta$. Partindo de um α arbitrário, pode-se construir β a régua e compasso. Assim, escolhe-se um β relativamente pequeno, embora arbitrário, e a partir de β traça-se facilmente α .

(III) A figura não deve sugerir nenhuma particularização indevida. As diferentes partes da figura não devem exibir relações aparentes que não sejam exigidas pelo problema. As linhas não devem ser iguais, ou perpendiculares, quando elas não o forem necessariamente. Os triângulos não devem parecer isósceles, ou retângulos, quando tal propriedade não for exigida no problema. O triângulo cujos ângulos são 45° , 60° e 75° é aquele, no sentido bem preciso da palavra, mais "remoto" tanto do isósceles como do retângulo.* Trace esse triângulo, ou um outro não muito diferente, quando desejar considerar um triângulo "geral".

(IV) Para destacar as diferentes funções das diversas linhas, podemos usar linhas grossas ou finas, contínuas ou pontilhadas, ou de cores diferentes. Podemos traçar uma delas muito de leve, se ainda não estiver decidido se a mesma será utilizada como linha auxiliar. Podemos traçar os elementos dados a lápis vermelho e usar outras cores para destacar partes importantes, como um par de triângulos semelhantes etc.

(V) Para ilustrar problemas de Geometria Espacial, devemos usar modelos tridimensionais ou desenhos no papel, ou no quadro-negro?

*Se os ângulos de um triângulo forem α, β e γ e $90^\circ > \alpha > \beta > \gamma$, pelo menos uma das diferenças $90^\circ - \alpha, \alpha - \beta, \beta - \gamma$ é 15° , a não ser que $\alpha = 75^\circ, \beta = 60^\circ$ e $\gamma = 45^\circ$. De fato,

$$\frac{3(90^\circ - \alpha) + 2(\alpha - \beta) + (\beta - \gamma)}{6} = 15^\circ$$

Os modelos tridimensionais são convenientes, mas de difícil preparo e dispendiosos. Assim sendo, precisamos nos contentar com desenhos, embora não seja fácil fazê-los expressivos. Algumas experiências com modelos improvisados de papelão são muito desejáveis para principiantes. É útil tomar objetos à mão, ou circundantes, como representações de noções geométricas. Assim, uma caixa, a sala de aulas podem representar o paralelepípedo retângulo; um lápis, o cilindro circular; um abajur, um tronco de cone circular reto etc.

4. Figuras traçadas no papel são fáceis de preparar, de reconhecer e de lembrar. As figuras planas nos são particularmente familiares, os problemas de Geometria Plana, especialmente acessíveis. Podemos aproveitar-nos destas circunstâncias, podemos utilizar, no manejo de objetos não-geométricos, a nossa aptidão para manipular figuras, se conseguirmos encontrar uma representação geométrica adequada para aqueles objetos não-geométricos.

De fato, as representações geométricas, como gráficos e diagramas de toda sorte, são usados em todas as ciências, não só na Física, na Química e nas Ciências Naturais, como também na Economia e, até mesmo, na Psicologia. Com o auxílio de representações geométricas apropriadas, procuramos tudo expressar em linguagem gráfica, tentamos reduzir problemas de qualquer tipo a problemas geométricos.

Desse modo, mesmo que não se trate de um problema de Geometria, é possível tentar *traçar uma figura*. A procura de uma lúcida representação geométrica para um problema não-geométrico constitui um importante passo no sentido da solução.

Generalização é a passagem da consideração de um elemento para a consideração de um conjunto que contém esse elemento; ou a passagem de consideração de um conjunto para um conjunto mais abrangente, que contém o conjunto restrito.

1. Se, por acaso, nos depararmos com a soma

$$1 + 8 + 27 + 64 = 100$$

poderemos observar que ela pode ser expressa sob a seguinte forma curiosa:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 10^2.$$

Ora, é natural que nos perguntemos: ocorrerá muitas vezes que a soma de cubos sucessivos tais como

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \dots + n^3$$

seja um quadrado? Ao fazermos esta pergunta, generalizamos. E esta é uma generalização feliz, pois ela nos leva de uma simples observação a uma notável lei geral. Em Matemática, Física, Ciências Naturais, muitos resultados foram alcançados graças a generalizações felizes. Ver INDUÇÃO E INDUÇÃO MATEMÁTICA.

2. A generalização pode ser útil na resolução de problemas. Tome-se o seguinte problema de Geometria Espacial: "Uma reta e um octaedro regular são dados por sua posição. Encontrar um plano que passe pela reta dada e que divida ao meio o volume do octaedro dado". Este problema pode parecer difícil, porém, de fato, basta alguma familiaridade com a forma do octaedro regular para sugerir o seguinte problema mais geral: "Uma reta e um *sólido com centro de simetria* são dados por sua posição. Encontrar um plano que passe pela reta dada e que divida ao meio o volume do sólido dado." O plano pedido passa, naturalmente, pelo centro de simetria do sólido e fica determinado por este ponto e pela reta dada. Como o octaedro tem um centro de simetria, o problema original fica também resolvido.

O leitor não deixará de observar que o segundo problema é mais geral que o primeiro e, não obstante, mais fácil. De fato, o que conseguimos ao resolver o primeiro problema foi *inventar o segundo problema*. Ao inventá-lo, reconhecemos o papel do centro de simetria; *desenredamos* a propriedade do octaedro que é essencial ao nosso problema, qual seja, que ele tem um centro de simetria.

O problema mais geral pode ser mais fácil de resolver. Esta afirmativa parece paradoxal mas, depois do exemplo acima, não nos deve surpreender. O mais importante ao resolver o problema particular foi a invenção do problema geral. Depois disto, somente restou uma pequena parte. Assim, neste caso, a resolução do problema geral é apenas uma pequena parte da resolução do problema particular.

Ver PARADOXO DA INVENÇÃO.

3. "Calcular o volume do tronco de uma pirâmide de base quadrada, sendo dados o lado da base inferior, 10 cm, o lado da base superior, 5 cm, e a altura do tronco, 6 cm." Se substituirmos os números 10, 5, 6 por letras, por exemplo, a, b, c , generalizamos. Chegamos a um problema mais geral que o original, que é o seguinte: "Calcular o volume do tronco de uma pirâmide de base quadrada, sendo dados o lado a da base inferior, o lado b da base superior e a altura c do tronco. "Esta generalização poderá ser muito útil. Ao passarmos de um problema "numérico" para um problema "literal", ganharemos acesso a novos procedimentos, poderemos variar os dados e, ao fazê-lo, poderemos verificar de várias maneiras os resultados. Ver É POSSÍVEL VERIFICAR O RESULTADO? 2 e VARIAÇÃO DO PROBLEMA, 4.

Heurística, Heurética ou "ars inveniendi" era o nome de um certo ramo de estudo, não bem delimitado, pertencente à Lógica, à Filosofia ou à Psicologia, muitas vezes delineado mas raramente apresentado com detalhes, hoje praticamente esquecido. O objetivo da Heurística é o estudo dos métodos e das regras da descoberta e da invenção. Alguns indícios desse estudo podem ser encontrados em trabalho dos comentaristas de Euclides. A este respeito, PAPPUS tem uma passagem particularmente interessante. As mais famosas tentativas de sistematização da Heurística devem-se a DESCARTES e a LEIBNITZ, ambos grandes matemáticos e filósofos. Bernard BOLZANO apresentou notável descrição pormenorizada da Heurística. O presente li-

vro é uma tentativa de reviver este estudo de forma moderna e modesta. (Ver HEURÍSTICA MODERNA.)

Heurístico, adjetivo, significa "que serve para descobrir".

Heurística moderna procura compreender o processo solucionador de problemas, particularmente as *operações mentais, típicas* desse processo, que tenham utilidade. Dispõe de várias fontes de informações, nenhuma das quais deve ser desprezada. Um estudo consciencioso da Heurística deve levar em conta, tanto as suas bases lógicas quanto as psicológicas. Não deve esquecer aquilo que autores antigos como Pappus, Descartes, Leibnitz e Bolzano escreveram sobre o assunto, mas muito menos pode desprezar a experiência imparcial. A experiência na resolução de problemas e a experiência na observação dessa atividade por parte de outros devem constituir a base em que se assenta a Heurística. Neste estudo, não devemos descurar nenhum tipo de problema, e sim procurar aspectos comuns na maneira de tratar de problemas de toda sorte: devemos considerar os aspectos gerais, independentemente do assunto específico do problema. O estudo da Heurística tem objetivos "práticos": melhor conhecimento das típicas operações mentais que se aplicam à resolução de problemas pode exercer uma certa influência benéfica sobre o ensino, particularmente sobre o ensino da Matemática.

O presente livro constitui a primeira tentativa de realização de tal programa. Passaremos agora a descrever como os diversos artigos que compõem este Dicionário ajustam-se ao programa.

1. A nossa lista é, de fato, uma relação de operações mentais típicas e úteis na resolução de problemas; as indagações e sugestões nela relacionadas indicam tais operações. Algumas destas são novamente descritas na Segunda Parte e outras são mais detalhadamente discutidas e exemplificadas na Primeira Parte.

Para maiores informações acerca de indagações e sugestões da lista, o leitor deverá procurar aqueles quinze artigos do Dicionário cujos títulos correspondem às entradas dos quinze parágrafos da lista: QUAL É A INCÓGNITA? É POSSÍVEL SATISFAZER A CONDICIONANTE? TRACE UMA FIGURA. . . É POSSÍVEL UTILIZAR O RESULTADO? O leitor que desejar informação sobre um determinado item da lista, deverá começar pela verificação das primeiras palavras do parágrafo que contém o item e, em seguida, procurar no Dicionário o artigo que tem por título essas primeiras palavras. Por exemplo, a sugestão "*Volte às definições*" consta do parágrafo da lista cuja frase inicial é: É POSSÍVEL REFORMULAR O PROBLEMA? Sob este título o leitor encontrará uma remissão a DEFINIÇÕES, artigo no qual a sugestão em causa está explicada e exemplificada.

2. O processo solucionador de problemas é complexo, pois apresenta diversos aspectos diferentes. Os doze principais artigos deste Dicionário estudam, com certa extensão, alguns desses aspectos. Passamos em seguida a mencionar seus títulos.

Quando trabalhamos intensamente, sentimos com nitidez o progresso do nosso trabalho. Ficamos jubilosos quando esse progresso é rápido e deprimidos quando é lento. O que é essencial ao PROGRESSO E CONSECUÇÃO do nosso trabalho? O artigo que trata desta questão é citado muitas vezes e deve ser lido logo no início deste estudo.

Ao tentarmos resolver um problema, consideramos um a um dos seus aspectos, revolvemos os mesmos incessantemente na nossa mente: a VARIAÇÃO DO PROBLEMA é essencial ao nosso trabalho. Podemos variar o problema pela DECOMPOSIÇÃO E RECOMBINAÇÃO dos seus elementos ou pela utilização dos recursos de GENERALIZAÇÃO, PARTICULARIZAÇÃO e ANALOGIA. A variação do problema pode nos levar a ELEMENTOS AUXILIARES ou à descoberta de um PROBLEMA AUXILIAR mais acessível.

Precisamos distinguir com clareza dois tipos de problemas: PROBLEMAS DE DETERMINAÇÃO e PROBLEMAS DE DEMONSTRAÇÃO. Nossa lista é particularmente apropriada a "problemas de determinação". Teremos de rever e alterar algumas das suas indagações e sugestões para aplicá-las também aos "problemas de demonstração".

Em problemas de todos os tipos, mas particularmente nos problemas matemáticos que não sejam simples demais, a NOTAÇÃO adequada e as FIGURAS geométricas constituem grandes e indispensáveis auxílios.

3. Dos vários aspectos apresentados pelo processo solucionador, alguns não são considerados neste livro e outros o são muito resumidamente. Justifica-se, creio eu, numa pequena exposição introdutória, a exclusão daqueles pontos que poderiam parecer muito sutis, técnicos ou controversos.

O RACIOCÍNIO HEURÍSTICO, que é provisório e apenas plausível, é importante na descoberta da solução, mas não o tome por uma demonstração. É preciso presumir, mas não esquecer: EXAMINE A SUA SUPOSIÇÃO. A natureza dos argumentos heurísticos é discutida em SINAIS DE PROGRESSO, mas a discussão deste assunto poderia ir mais longe.

A consideração de certos padrões lógicos é importante para o nosso tema, mas pareceu-nos aconselhável não acrescentar nenhum artigo técnico. Há apenas dois artigos predominantemente dedicados a aspectos psicológicos, sobre PERSISTÊNCIA, ESPERANÇA, SUCESSO e sobre TRABALHO SUBCONSCIENTE. No artigo REGRESSÃO, menciona-se, de passagem, uma observação referente à psicologia animal.

Destacamos que todos os tipos de problemas, especialmente PROBLEMAS PRÁTICOS e, até mesmo, ENIGMAS situam-se no campo da Heurística. Também alertamos para o fato de que REGRAS DE DESCOBERTA infalíveis ficam fora do escopo da pesquisa séria. A Heurística trata do comportamento humano em face de problemas. É de presumir que isto venha ocorrendo desde os primórdios da sociedade humana e a quintessência de antigas observações a respeito parece ter sido preservada na SABEDORIA DOS PROVÉRBIOS.

4. Incluímos artigos sobre questões particulares e outros, referentes a aspectos mais gerais, são mais extensos porque poderão ter, no todo ou em parte, interesse especial para professores e estudantes.

Há artigos que tratam de questões metodológicas muitas vezes relevantes na Matemática elementar, tais como PAPPUS, REGRESSÃO (já mencionado no item 3), DEMONSTRAÇÃO POR ABSURDO E DEMONSTRAÇÃO INDIRETA, INDUÇÃO E INDUÇÃO MATEMÁTICA, EQUACIONAMENTO, TESTE DIMENSIONAL E POR QUE DEMONSTRAR? Alguns artigos dirigem-se mais em particular aos professores, como PROBLEMA ROTINEIRO e DIAGNÓSTICO e outros aos estudantes, como O FUTURO MATEMÁTICO, O LEITOR INTELIGENTE e O SOLUCIONADOR DE PROBLEMAS INTELIGENTE.

Deve-se aqui mencionar que os diálogos entre o professor e seus alunos, que aparecem nas seções 8, 10, 18, 19, 20 e em vários artigos do Dicionário, podem servir de modelos não só para professores como também para aquele que procura sozinho resolver os seus problemas. A descrição do pensamento como um "discurso mental", como uma espécie de conversação do pensador consigo próprio, não é inapropriada. Os diálogos em questão revelam o progresso do processo solucionador. Aquele que procura resolver o problema, ao falar consigo mesmo, poderá progredir da maneira indicada.

5. Não mencionaremos todos os artigos, somente alguns poucos serão citados. Certos artigos contêm observações sobre a história do nosso assunto, sobre DESCARTES, LEIBNITZ, BOLZANO, sobre a HEURÍSTICA, sobre TERMOS, ANTIGOS E NOVOS e sobre PAPPUS (este último já mencionado no item 4.)

Alguns artigos procuram explicar termos técnicos: CONDICIONANTE, COROLÁRIO, LEMA.

Outros contêm apenas remissões e vão assinalados por adagas [†] no Sumário.

6. A Heurística visa à generalidade, ao estudo de procedimentos que independem do assunto em questão e são aplicáveis a problemas de toda sorte. A presente exposição, porém, apresenta como exemplos quase exclusivamente problemas da Matemática elementar. Não se deve esquecer que isto representa uma restrição, mas espera-se que tal não prejudique seriamente o caráter do nosso estudo. De fato, os problemas da Matemática elementar apresentam toda a variedade desejável e o estudo da sua resolução é acessível e interessante. Além disso, os problemas não-matemáticos, embora raras vezes citados como exemplos, não ficaram inteiramente esquecidos. Os problemas matemáticos mais avançados nunca estão diretamente mencionados, mas eles constituem a base real de presente exposição. O matemático experiente, que tenha interesse por este tipo de estudo, poderá acrescentar exemplos tirados da sua própria experiência para elucidar os pontos aqui ilustrados por exemplos elementares.

7. O autor deseja reconhecer a sua dívida e expressar a sua gratidão para com alguns autores modernos, não mencionados no artigo HEURÍSTICA. São eles o físico e filósofo Ernst Mach, o matemático Jacques Hadamard e os psicólogos William James e Wolfgang Kohler. Deseja ainda mencionar o psicólogo K. Duncker e o matemático F. Krauss, cuja obra (publicada depois que a sua pesquisa estava bem adiantada e parcialmente publicada) revela certas observações paralelas.

Idéia brilhante, ou “boa idéia”, é uma expressão coloquial que significa um súbito avanço no sentido da solução (ver PROGRESSO E CONSECUÇÃO, 6). O aparecimento de uma idéia brilhante é uma experiência que todos conhecem, mas é difícil descrevê-la e, portanto, parece interessante observar que uma autoridade tão antiga como Aristóteles fez dela, incidentalmente, uma sugestiva descrição.

Quase todos concordam que a concepção de uma idéia brilhante é um “ato de sagacidade”. Aristóteles define assim “sagacidade”: “Sagacidade é chegar instantaneamente, por intuição, à conexão essencial. Como, por exemplo, se alguém vir uma pessoa a falar de uma certa maneira com um homem rico, poderá imediatamente adivinhar que essa pessoa está tentando tomar dinheiro emprestado. Ou, ao observar que o lado brilhante da Lua está sempre voltado para o Sol, poderá repentinamente perceber que a Lua brilha porque é iluminada pelo Sol”.

O primeiro, sem ser mau exemplo, é muito trivial: não é preciso muita sagacidade para imaginar coisas deste tipo quando se trata de gente rica e dinheiro; portanto, a idéia não é muito brilhante. O segundo exemplo torna-se, porém, particularmente notável se fizermos um pequeno esforço de imaginação para situá-lo na época apropriada.

Devemos lembrar que um contemporâneo de Aristóteles teria de observar o Sol e as estrelas se quisesse saber as horas, pois não dispunha de relógios de pulso, e de observar as fases da Lua se pretendesse viajar à noite, pois não havia iluminação pública. Estava ele muito mais familiarizado com o céu do que o habitante de uma cidade moderna e a sua inteligência natural não estava obscurecida por fragmentos mal digeridos de informações jornalísticas sobre teorias astronômicas. Ele via a Lua cheia como um disco plano, semelhante ao disco solar, embora muito menos brilhante. Ele devia ter meditado sobre as incessantes variações na forma e na posição da Lua. Ele observara também, ocasionalmente, a Lua à luz do dia, perto do nascer ou do pôr do Sol, e concluíra que o “lado brilhante da Lua está sempre voltado para o Sol”, o que era, por si própria, uma notável conclusão. E então ele percebe que os aspectos variáveis da Lua são como os vários aspectos de uma bola que é iluminada de um lado, de maneira que apenas a metade fica brilhante e a outra na semi-escurecimento. Ele concebe o Sol e a Lua não como discos planos, mas como corpos redondos, um deles a fornecer e outro a receber a luz. Ele percebe a conexão essencial, reformula a sua anterior concepção “instantaneamente”: há um repentino salto de imaginação, surge uma idéia brilhante, uma centelha de gênio.

Indução e indução matemática. A indução é o processo da descoberta de leis gerais pela observação de casos particulares. É utilizada em todas as ciências, inclusive na Matemática. A indução matemática é utilizada exclusivamente na Matemática, para demonstrar teoremas de um certo tipo. É de lamentar que estes nomes estejam relacionados, pois há muito pouca conexão lógica entre os dois processos. Há, no entanto, alguma conexão prática, pois muitas vezes utilizamos ambos conjuntamente. Vamos ilustrar todos os dois pelo mesmo exemplo.

1. Podemos observar, por acaso, que

$$1 + 8 + 27 + 64 = 100$$

e, reconhecendo os cubos e o quadrado, podemos apresentar o fato observado sob a forma mais interessante:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 10^2.$$

Como terá ocorrido isto? Acontecerá muitas vezes que a soma dos cubos dos inteiros sucessivos seja um quadrado perfeito?

Ao assim indagarmos, procedemos como o naturalista que, impressionado por uma planta estranha ou por uma formação geológica singular, concebe uma investigação geral. A nossa investigação geral é relativa à soma de cubos dos inteiros sucessivos.

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3.$$

Fomos a ela levados pelo "caso particular" de $n = 4$.

O que podemos agora fazer? O que faria o naturalista: estudar outros casos particulares. Os casos de $n = 2, 3$ são ainda mais simples; o caso de $n = 5$ é o seguinte. Acrescentemos, por amor à uniformidade e à inteireza, o caso de $n = 1$. Dispondo ordenadamente todos estes casos, como um geólogo disporia suas amostras de um certo mineral, chegaríamos à seguinte tabela:

1	=	1	=	1^2
1 + 8	=	9	=	3^2
1 + 8 + 27	=	36	=	6^2
1 + 8 + 27 + 64	=	100	=	10^2
1 + 8 + 27 + 64 + 125	=	225	=	15^2

É difícil acreditar que todas estas somas de cubos sucessivos sejam quadrados perfeitos por mero acaso. Numa circunstância semelhante, o naturalista teria poucas dúvidas de que a lei geral sugerida pelos casos particulares até então observados estaria certa: a lei geral teria ficado quase demonstrada por *indução*. O matemático manifesta-se com mais reserva, embora raciocine essencialmente da mesma maneira. Diria ele que o seguinte teorema é fortemente sugerido por indução:

A soma dos primeiros cubos é um quadrado perfeito.

2. Fomos levados a conjecturar uma lei notável, um pouco misteriosa. Por que seriam quadrados perfeitos essas somas de cubos sucessivos? No entanto, tudo indica que o são.

O que faria o naturalista numa tal situação? Ele continuaria a examinar a conjectura, seguindo linhas de pesquisa. O naturalista pode acumular maiores provas experimentais. Se desejarmos fazer o mesmo, teremos de verificar os casos seguintes, de $n = 6, 7, \dots$. O naturalista pode também reexaminar os fatos cuja observação o levou à sua conjectura: ele os compara cuidadosamente, procura descobrir alguma regularidade mais expressiva, alguma outra analogia. Sigamos esta linha de pesquisa.

Reexaminemos os casos de $n = 1, 2, 3, 4, 5$, que estão mostrados na tabela. Por que são estas somas quadrados perfeitos? Suas bases respectivas são 1, 3, 10, 15. O que há de notável nestas bases? Haverá alguma regularidade mais significativa, alguma analogia? Seja como for, elas não parecem crescer muito irregularmente. Como crescem? A diferença entre dois termos consecutivos dessa seqüência também está crescendo.

$$3 - 1 = 2, \quad 6 - 3 = 3, \quad 10 - 6 = 4, \quad 15 - 10 = 5.$$

Ora, estas diferenças são notavelmente regulares. Podemos ver aqui uma surpreendente analogia entre as bases daqueles quadrados, uma notável regularidade nos números 1, 3, 6, 10, 15:

$$\begin{aligned} 1 &= 1 \\ 3 &= 1 + 2 \\ 6 &= 1 + 2 + 3 \\ 10 &= 1 + 2 + 3 + 4 \\ 15 &= 1 + 2 + 3 + 4 + 5 \end{aligned}$$

Se esta regularidade for geral (e é difícil acreditar no contrário), o teorema de que suspeitamos toma uma forma mais precisa, que é:

Para $n = 1, 2, 3, \dots$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n)^2.$$

3. A lei que acaba de ser formulada foi encontrada por indução e o modo pelo qual a ela se chegou nos dá da indução uma idéia que é inevitavelmente unilateral e imperfeita, mas não distorcida. A indução procura encontrar regularidade e coerência nos fatos observados. Seus mais notáveis instrumentos são a generalização, a particularização e a analogia. A generalização por tentativas parte de um esforço para compreender os fatos observados; baseia-se na analogia e é verificada por meio de outros casos particulares.

Eximimo-nos de maiores comentários sobre a indução, assunto que é objeto de grande controvérsia entre os filósofos. Mas devemos acrescentar que muitos fatos matemáticos foram primeiro encontrados por indução e demonstrados depois. A Matemática, apresentada com rigor, é uma ciência dedutiva sistemática, mas a Matemática em desenvolvimento é uma ciência indutiva experimental.

4. Na Matemática, assim como nas Ciências Físicas, podemos utilizar a observação e a indução para a descoberta de leis gerais. Mas existe uma diferença. Nas Ciências Físicas não há autoridade maior do que a observação e a indução, enquanto na Matemática há uma tal autoridade: a demonstração rigorosa.

Depois de trabalhar experimentalmente por algum tempo, seria bom mudar de ponto de vista. Sejam rigorosos. Acabamos de descobrir um resultado interessante, mas o raciocínio que nos levou até ele foi apenas plausível, experimental, provisório, heurístico. Tentemos estabelecê-lo definitivamente por meio de uma demonstração rigorosa.

Chegamos agora a um "problema de demonstração": demonstrar ou refutar o resultado já enunciado (ver o item 2, acima).

Há uma pequena simplificação. Possivelmente sabemos que

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

De qualquer modo, isto é fácil de verificar. Tome um retângulo de lados n e $n + 1$, e o divida em metades, por uma linha em ziguezague, tal como é mostrado na figura 18 a para o caso de $n = 4$. Cada metade tem a forma de "escada" e a sua área é expressa por $1 + 2 + \dots + n$; para $n = 4$, será $1 + 2 + 3 + 4$ (ver figura 18 b). A área total do retângulo é $n(n + 1)$, da qual a área em "escada" é a metade. A fórmula está demonstrada.

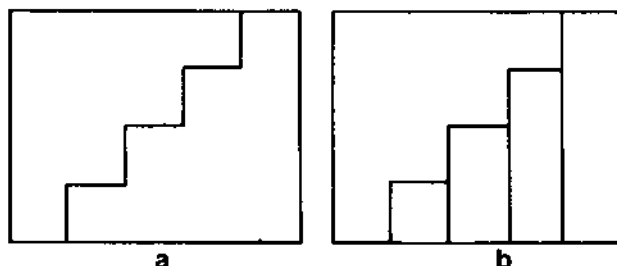


Figura 18

Por indução, podemos transformar o resultado que acabamos de encontrar em

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2$$

5. Se não tivermos idéia de como demonstrar este resultado, poderemos pelo menos verificá-lo. Ensaieemos o primeiro caso que ainda não verificamos, de $n = 6$. Para este valor, a fórmula fornece

$$1 + 8 + 27 + 64 + 125 + 216 = \left(\frac{6 \times 7}{2} \right)^2$$

que se revela verdadeira, pois os dois membros são iguais a 441.

É possível verificar esta fórmula com maior rigor. Mas é muito provável que ela seja genericamente verdadeira, verdadeira para todos os valores de n . Permanecerá verdadeira quando passamos de qualquer valor de n para o valor seguinte, $n + 1$? Ao lado da fórmula acima expressa, deveremos também ter

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 + (n+1)^3 = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2} \right)^2$$

Ora, é possível uma verificação simples. Subtraindo desta a fórmula anterior, teremos

$$(n+1)^3 = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2} \right)^2 - \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2$$

Esta última é, porém, fácil de verificar. O segundo termo pode ser expresso como

$$\begin{aligned} \left(\frac{(n+1)}{2} \right)^2 \left[(n+2)^2 - n^2 \right] &= \left(\frac{n+1}{2} \right)^2 \left[n^2 + 4n + 4 - n^2 \right] \\ \frac{(n+1)^2}{4} (4n+4) &= (n+1)^2 (n+1) = (n+1)^3. \end{aligned}$$

A nossa fórmula, encontrada experimentalmente, passou num teste vital.

Examinemos cuidadosamente o significado deste teste. Verificamos, sem sombra de dúvida, que

$$(n+1)^3 = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2} \right)^2 - \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2$$

Não sabemos ainda se

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2$$

é verdadeira. Mas se soubéssemos que esta *era*, verdadeira, poderíamos concluir, somando a ela a equação que verificamos sem sombra de dúvida, que

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 + (n + 1)^3 = \left(\frac{(n + 1)(n + 2)}{2} \right)^2$$

também é verdadeira, o que equivale à mesma afirmativa para o inteiro seguinte $n + 1$. Ora, sabemos já que a nossa conjectura é verdadeira para $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$. Em virtude daquilo que acabamos de dizer, a conjectura, sendo verdadeira para $n = 6$, deverá ser também verdadeira para $n = 7$; sendo verdadeira para $n = 7$ é verdadeira para $n = 8$; sendo verdadeira para $n = 8$ é verdadeira para $n = 9$ e assim sucessivamente. Ela é válida para todos os valores de n , está demonstrado que é genericamente verdadeira.

6. A demonstração precedente pode servir de modelo para muitos casos semelhantes. Quais são os aspectos essenciais desse modelo?

A afirmativa que temos a demonstrar deve ser apresentada antecipadamente, de forma precisa. Ela deve depender de um inteiro n .

A afirmativa deve ser suficientemente “explícita”, de tal modo que tenhamos alguma possibilidade de verificar se ela permanece verdadeira na passagem de n para o inteiro seguinte $n + 1$.

Se conseguirmos realmente verificar isto, poderemos utilizar a experiência obtida na verificação para concluir que a afirmativa deve ser verdadeira para $n + 1$, desde que o seja para n . Quando chegarmos a este ponto, bastará sabermos que a afirmativa é verdadeira para $n = 1$; daí se segue para $n = 2$; daí se segue para $n = 3$ e assim por diante. Ao passarmos de qualquer número inteiro para o seguinte, demonstramos genericamente a afirmativa.

Este processo é usado com tanta freqüência que merece um nome. Poderíamos chamá-lo de “demonstração de n para $n + 1$ ” ou, ainda mais simplesmente, de “passagem para o inteiro seguinte”. Infelizmente, o termo técnico aceito é “indução matemática”, denominação esta resultante de uma circunstância aleatória. A afirmativa rigorosa que temos a demonstrar pode provir de qualquer origem, mas que origem é essa é irrelevante do ponto de vista lógico. Ora, em muitos casos, como neste aqui discutido em detalhe, a origem é a indução, a afirmativa é encontrada experimentalmente e, assim sendo, a demonstração aparece como um complemento matemático à indução. Explica-se por isto a denominação.

7. Eis aqui um outro ponto, um pouco sutil, mas importante, para quem deseje encontrar demonstrações por si próprio. Como se viu, chegamos a duas diferentes afirmativas por indução e observação, a primeira no item 1 e a segunda no item 2. A segunda era mais precisa do que a primeira. Tratando da segunda afirmativa, encontramos uma possibilidade de verificar a passagem de n para $n + 1$ e assim conseguimos chegar a uma demonstração por “indução matemática”. Tratando da pri-

meira afirmativa, sem termos conhecimento da precisão acrescentada pela segunda, muito dificilmente seríamos capazes de encontrar uma tal demonstração. Com efeito, a primeira afirmativa é menos precisa, menos "explícita", menos "tangível", menos susceptível à verificação, do que a segunda. A passagem da primeira para a segunda, da formulação menos precisa para a mais precisa, constituiu um importante preparativo para a demonstração final.

Esta circunstância apresenta um aspecto paradoxal. A segunda afirmativa é mais forte e implica imediatamente na primeira. Enquanto isto, a primeira afirmativa, mais "nebulosa", dificilmente poderia implicar na segunda, mais precisa. Assim, é mais fácil dominar o teorema mais forte do que o mais fraco. Nisto consiste o PARADOXO DA INVENÇÃO.

Já o viu antes? É possível que já tenhamos resolvido antes o mesmo problema que ora nos é apresentado, ou ouvido falar dele, ou encontrado um problema muito semelhante. Estas são possibilidades que não devemos deixar de examinar. Tentemos lembrar do que ocorreu. *Já o viu antes? Ou já o viu sob uma forma ligeiramente diferente?* Mesmo que as respostas sejam negativas, tais indagações podem dar início à mobilização de conhecimentos úteis.

A indagação do título deste artigo é muitas vezes feita com um sentido mais geral. Para obter a solução, temos de extrair da memória elementos relevantes, temos de mobilizar fragmentos latentes de nosso conhecimento (PROGRESSO E CONSECUÇÃO). Não podemos, naturalmente, saber de antemão quais desses fragmentos latentes serão relevantes, mas há certas possibilidades que não podemos deixar de examinar. Assim, qualquer aspecto do problema presente que tenha desempenhado um papel na solução de algum outro problema poderá ser de novo útil. Portanto, se qualquer aspecto do problema presente nos parecer de possível importância, devemos tentar reconhecê-lo. O que é? Conhece-o? *Já o viu antes?*

Leibnitz, Gottfried Wilhelm (1646-1716), grande matemático e filósofo, pensou em escrever uma "Arte da Invenção", mas nunca chegou a realizar este seu intento. Numerosos fragmentos dispersos em sua obra revelam, porém, que ele mantinha idéias muito valiosas sobre o assunto, cuja importância foi muitas vezes por ele realçada. Assim, escreveu Leibnitz: "Nada é mais importante do que observar as origens da invenção, as quais são, na minha opinião, mais interessantes que as próprias invenções".

Lema quer dizer "teorema auxiliar". A palavra é de origem grega e a sua tradução literal seria "que se admite".

Suponha-se que procuramos demonstrar o teorema *A*. Somos levados a crer em um outro teorema *B*; se *B* for verdadeiro poderemos, talvez, demonstrar *A*.

Admitimos B provisoriamente, deixando para mais tarde a sua demonstração, e proseguimos com a demonstração de A . Assim, B é admitido como um teorema auxiliar do teorema proposto A . Esta breve descrição é razoavelmente típica e explica o atual significado da palavra “lema”.

Notação. Para sentir as vantagens de uma notação bem escolhida e bem conhecida, bastará tentar somar alguns números não muito pequenos, com a condição de ser vedado o uso dos algarismos arábicos comuns, mesmo que se permita a utilização de algarismos romanos. Tomem-se, por exemplo, os números MMMXC, MDXCVI, MDCCLXXXI, MDCCCLXXXVII.

Não é possível exagerar a importância da notação matemática. Os computadores modernos, que usam a notação decimal, apresentam uma grande vantagem sobre os antigos, que não dispunham desta maneira conveniente de escrever os números. Um estudante de curso médio atualmente, que conhece a notação usual da Álgebra, da Geometria Analítica e do Cálculo Diferencial e Integral, leva uma imensa vantagem sobre os matemáticos gregos na resolução de problemas de áreas e volumes, que exercitaram o gênio de Arquimedes.

1. A fala e o pensamento estão intimamente relacionados, pois o uso das palavras ajuda a pensar. Certos filósofos foram um pouco além e afirmaram que o uso das palavras é indispensável ao uso do raciocínio.

Esta última afirmativa parece, no entanto, de certa forma exagerada. Se tivermos alguma experiência de trabalho matemático sério, saberemos que é possível raciocinar profundamente sem o auxílio de quaisquer palavras, apenas pela observação de figuras geométricas ou pela operação de símbolos algébricos. Figuras e símbolos estão intimamente relacionados com o raciocínio matemático, o seu emprego auxilia o raciocínio. Poderíamos aprofundar aquela afirmativa um pouco estreita de filósofos e filólogos trazendo as palavras para o grupo dos signos e dizendo que o uso de signos parece indispensável ao exercício do raciocínio.

De qualquer maneira, o uso dos símbolos matemáticos é semelhante ao uso das palavras. A notação matemática aparece como uma espécie de linguagem, *une langue bien faite*, uma linguagem bem adaptada ao seu objetivo, concisa e precisa, cujas regras, ao contrário do que ocorre com as regras da gramática corrente, não sofrem exceções.

Se aceitarmos este ponto de vista, o EQUACIONAMENTO surge como um tipo de tradução, tradução da linguagem corrente para a linguagem dos símbolos matemáticos.

2. Certos símbolos matemáticos como $+$, $-$, $=$ e diversos mais têm um significado tradicional estabelecido, porém outros símbolos, como as minúsculas e maiúsculas dos alfabetos romano e grego, são usados com diferentes significados em

problemas diferentes. Quando nos defrontamos com um novo problema, devemos escolher certos símbolos, devemos *adotar uma notação adequada*. Alguma coisa de semelhante ocorre na linguagem corrente. Muitas palavras são usadas com diferentes sentidos em contextos diferentes; quando a precisão for importante, devemos escolher cuidadosamente as palavras.

Um passo importante na resolução de um problema é a escolha da notação. Ela deve ser feita cuidadosamente. O tempo inicialmente dispendido em escolher a notação pode muito bem ser compensado mais tarde, pois evitamos com isto hesitações e confusões. Além do mais, ao escolhermos cuidadosamente a notação, teremos de pensar detidamente nos elementos que precisam ser denotados. Assim, pela escolha de uma notação adequada, podemos dar uma contribuição essencial à compreensão do próprio problema.

3. Uma boa notação deve ser inequívoca, fecunda, fácil de lembrar; ela deve fugir de segundos sentidos prejudiciais e aproveitar os segundos sentidos úteis. A ordem e a conexão dos signos devem sugerir a ordem e a conexão das coisas.

4. Os signos devem ser, antes de tudo, *inequívocos*. É inadmissível que o mesmo símbolo sirva para denotar dois objetos diferentes na mesma questão. Se, na resolução de um problema, uma certa grandeza for denominada *a*, dever-se-á evitar chamar, no mesmo problema, qualquer outra coisa de *a*. Naturalmente, nada impede que se use essa letra com um sentido diferente num problema diferente.

Embora seja vedado o uso do mesmo símbolo para objetos diferentes, é admissível o uso de símbolos diferentes para o mesmo objeto. Assim, por exemplo, o produto de *a* e *b* pode ser escrito.

$$a \times b \qquad a \cdot b \qquad ab.$$

Em alguns casos, há vantagens em usar dois ou mais diferentes signos para o mesmo objeto, mas tais casos exigem um cuidado especial. Geralmente, é melhor usar somente um signo para cada objeto e em caso algum devemos usar arbitrariamente signos diversos.

5. Um bom signo deve ser *fácil de lembrar* e fácil de reconhecer; o signo deve imediatamente lembrar-nos do objeto e o objeto, do signo.

Um recurso simples para tornar os signos facilmente reconhecíveis é usar *iniciais* como símbolos. Por exemplo, na seção 20, denotamos por *r* a razão de variação; por *t* o tempo; por *V* o volume. Assim, na mesma seção 20, tivemos de considerar um raio, mas não nos foi possível chamá-lo de *r* porque esta letra já houvera sido tomada para denotar uma razão. Há, ainda, outras restrições à escolha dos signos e outros meios para torná-los facilmente reconhecíveis, os quais serão em seguida tratados.

6. Quando a *ordem e a conexão dos signos sugerem a ordem e a conexão dos objetos*, a notação torna-se não só prontamente reconhecível como também parti-

cularmente útil para auxiliar a concepção do problema. Diversos exemplos fazem-se necessários para ilustrar este ponto.

(I) Para denotar objetos próximos em nossa concepção do problema, utilizamos letras que ficam alfabeticamente próximas.

Por isso, geralmente usamos letras iniciais do alfabeto, tais como a, b, c , para dados ou constantes, e letras finais do alfabeto, tais como x, y, z , para incógnitas ou variáveis.

Na seção 8, usamos a, b, c , para denotar os dados comprimento, largura e altura de um paralelepípedo. Nessa ocasião, a, b, c foram preferíveis à notação pelas iniciais c, l, a . As três dimensões lineares desempenham a mesma função no problema, o que ficou realçado pelas letras sucessivas. Além disso, as letras iniciais do alfabeto, a, b, c , são, como acabamos de observar, as mais usadas para denotar grandezas dadas. É possível que, em alguma outra circunstância, onde as três dimensões desempenhem papéis diferentes e seja importante saber quais seriam as dimensões horizontais e qual a vertical, as notações c, l, a , houvessem sido preferíveis.

(II) Para denotar objetos da mesma categoria, geralmente escolhemos letras do mesmo alfabeto, usando diferentes alfabetos para categorias diferentes. Assim, na Geometria Plana geralmente adotamos:

Maíúsculas romanas, como $A, B, C, \dots$ para pontos,

Minúsculas romanas, como $a, b, c, \dots$ para linhas,

Minúsculas gregas, como $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ para ângulos.

Quando houver dois objetos da mesma categoria que apresentem entre si uma relação particular, de relevância para o problema, podemos escolher, para denotá-los, letras correspondentes, tais como A e a , B e b , assim por diante. Um exemplo conhecido é a notação habitual para um triângulo:

A, B, C denotam os vértices,

a, b, c denotam os lados,

α, β, γ denotam os ângulos.

Fica entendido que a é o lado oposto ao vértice A e o ângulo em A é α .

(III) Na seção 20, as letras a, b, x, y foram particularmente bem escolhidas para indicar a natureza e a conexão dos elementos denotados. As letras a, b lembram que as grandezas denotadas são constantes; x, y indicam variáveis; a precede b assim como x precede y , o que sugere que a relação existente entre a e b é a mesma que existe entre x e y . De fato, a e x são horizontais, b e y são verticais e $a:b = x:y$.

7. A notação

$$\triangle ABC \sim \triangle EFG$$

indica que os triângulos em questão são semelhantes. Nos livros modernos, a fórmula revela ainda que os vértices se correspondem na ordem em que estão escritos, A a E , B a F , C a G . Nos livros mais antigos, esta convenção ainda não era adotada; o leitor tinha de olhar a figura ou lembrar a derivação para verificar a correspondência entre os vértices.

A notação moderna é preferível, pois ela permite tirar conclusões *sem ver a figura*. Assim, com seu auxílio, podemos concluir que

$$\begin{aligned} \angle A &= \angle E \\ AB : BC &= EF : FG \end{aligned}$$

e estabelecer outras relações do gênero. A notação antiga é menos expressiva e não proporciona tais conclusões definitivas.

Uma notação que exprime mais do que uma outra pode ser considerada mais *fecunda*. A notação moderna para semelhança de triângulos é mais fecunda do que a antiga, pois reflete melhor a ordem e a conexão dos elementos e, por isto, proporciona maior número de conclusões do que a notação antiga.

8. As palavras têm *segundos sentidos*. Certos contextos em que uma palavra é usada com frequência acabam por influenciá-la, acrescentando ao seu sentido original algum matiz, ou segundo sentido, ou "conotação". Quando escrevemos cuidadosamente, procuramos escolher, dentre as palavras que têm quase o mesmo significado, aquela cujo segundo sentido mais se adapta ao caso.

Algo semelhante se passa com a notação matemática. Até mesmo os símbolos matemáticos podem adquirir, dos contextos em que forem muito usados, uma espécie de segundo sentido. Para escolher com cuidado a nossa notação, temos de levar em conta esta circunstância. Exemplifiquemos.

Há certas letras que adquiriram um significado tradicional firmemente arraigado. Assim, e geralmente denota a base dos logaritmos naturais; i é $\sqrt{-1}$, a unidade imaginária, e π é a relação entre a circunferência do círculo e o diâmetro. De um modo geral, é preferível só usar estes símbolos no seu significado tradicional. Se usarmos um deles com um outro sentido, o seu significado tradicional poderá ocasionalmente interferir ou causar embaraços e enganos. É verdade que segundos sentidos desta espécie causam menos prejuízos aos principiantes, que ainda não estudaram muitas matérias, do que aos matemáticos, que devem ter experiência suficiente para livrar-se de inconvenientes desta natureza.

O segundo sentido dos símbolos pode também ser útil, até mesmo muito útil, se for tratado com habilidade. Uma notação usada em ocasiões anteriores pode ajudar-nos a relembrar algum procedimento aproveitável; é evidente que devemos ter o necessário cuidado de separar claramente o significado presente (primário) do símbolo do seu significado anterior (secundário). Uma *notação habitual* [como a notação

tradicional para as partes de um triângulo mencionada em 6(II) acima] apresenta grandes vantagens; ela pode nos auxiliar a relembrar vários procedimentos em que foi anteriormente usada. Lembramo-nos de fórmulas por meio de alguma notação habitual. Naturalmente, é preciso tomar as devidas precauções quando, por circunstâncias especiais, somos compelidos a usar uma notação habitual num contexto diferente do usual.

9. Quando temos de escolher entre duas notações, um motivo pende para uma delas e um outro motivo pende para a outra. Precisamos de experiência e de critério para escolher a notação mais adequada, do mesmo modo que precisamos dessas mesmas qualidades para escolher as palavras mais apropriadas. É bom, no entanto, conhecer as vantagens e desvantagens descritas nos parágrafos precedentes. De qualquer maneira, devemos escolher cuidadosamente a notação e ter *uma boa razão* para tal escolha.

10. Não apenas os piores alunos da turma, mas até estudantes bem inteligentes, podem ter aversão à Álgebra. Há sempre alguma coisa de arbitrário e artificial numa notação e o aprendizado de uma nova notação constitui uma sobrecarga para a memória. O estudante inteligente recusará aceitar esse ônus se ele não notar nisso nenhuma compensação. A sua aversão pela Álgebra se justificará se não lhe for dada ampla oportunidade para que ele se convença, por sua própria experiência, de que a *linguagem dos símbolos matemáticos ajuda o raciocínio*. Auxiliá-lo nessa experiência constitui uma das mais importantes tarefas do professor.

Digo que é uma tarefa importante, mas não que ela seja fácil. As observações precedentes podem ser de alguma utilidade. Ver também EQUACIONAMENTO. A verificação de uma fórmula pela discussão detalhada dos seus elementos pode ser recomendada como um exercício particularmente instrutivo; ver seção 14 e É POSSÍVEL VERIFICAR O RESULTADO? 2.

O futuro matemático deverá ser um hábil solucionador de problemas, mas não só isto. Oportunamente, ele terá de resolver sérios problemas matemáticos e, primeiro, deverá descobrir para que tipos é mais bem dotado.

Para ele, a mais importante parte da sua atividade é o retrospecto da resolução completa. Ao verificar como trabalhou e a forma final da resolução, poderá encontrar uma infinita variedade de coisas a observar. Poderá meditar sobre a dificuldade do problema e sobre a idéia decisiva, poderá tentar identificar tanto o que lhe trouxe dificuldades como o que o auxiliou. Poderá procurar idéias simples, intuitivas: *É possível vê-lo num relance?* Poderá comparar e estabelecer métodos diversos: *É possível chegar ao resultado por um caminho diferente?* Poderá tentar esclarecer o problema comparando-o com outros já resolvidos anteriormente e inventar novos, que possam ser resolvidos com base no que acaba de resolver: *É possível utilizar o resultado, ou o método, em algum outro problema?* Ao digerir os problemas que

solucionou de forma tão completa quanto foi capaz, ele poderá adquirir um conhecimento bem ordenado, pronto para ser utilizado.

O futuro matemático aprende, como todos, pela imitação e pela prática. Ele deverá procurar, para imitar, o modelo certo. Deverá observar o professor que o estimula a competir com um colega capaz. Aí então, o que é mais importante, ele deverá ler, não só os livros adotados, mas também os bons autores, até encontrar um deles cujas características esteja naturalmente inclinado a imitar. Deverá apreciar e procurar aquilo que lhe parece simples, instrutivo ou belo. Deverá resolver problemas, escolhendo os mais ao seu feitio, e inventar novos. Por estes meios, e todos os outros meios, deverá esforçar-se para fazer a sua primeira descoberta importante: ele deverá descobrir os seus gostos e as suas aversões, a sua própria predileção.

O leitor inteligente de um livro de Matemática deseja duas coisas:

Primeiro, verificar se o presente passo do argumento está correto; e

Segundo, compreender o objetivo desse passo.

O ouvinte inteligente de uma aula de Matemática tem os mesmos desejos. Se ele não conseguiu verificar que aquele passo do argumento está correto e até suspeitar que, possivelmente, esteja incorreto, poderá protestar e fazer uma pergunta. Se não puder perceber nenhum objetivo nesse passo, nem suspeitar de nenhuma justificativa para o mesmo, ele dificilmente conseguirá, sequer, formular uma objeção clara, não protestará, ficará apenas desanimado e enfadado e perderá o fio do argumento.

O autor e o professor inteligentes devem ter tais pontos em mente. É certamente necessário escrever e falar com correção, mas não é suficiente. Uma dedução corretamente apresentada no livro ou no quadro-negro pode ser inacessível e pouco instrutiva se o objetivo dos passos sucessivos for incompreensível, isto é, se o leitor, ou o ouvinte, não conseguir entender como foi possível encontrar o argumento, se ele não for capaz de obter da apresentação nenhum indício que lhe sirva para encontrar por si só o argumento.

As indagações e sugestões da nossa lista podem ser úteis ao autor e ao professor por frisarem o objetivo e a motivação do argumento. Particularmente útil a este respeito é a indagação: UTILIZOU TODOS OS DADOS? O autor, ou o professor, poderá mostrar, com o seu auxílio, uma boa razão para levar em consideração um dado que até aí não fora utilizado. O leitor, ou o ouvinte, poderá usar a mesma indagação para compreender a razão que levou o autor, ou o professor, a considerar tais e tais elementos, e sentir que, ao fazer a pergunta, poderia ter, ele próprio, descoberto este passo do argumento.

O professor de Matemática tradicional é distraído. Geralmente aparece em

público com um guarda-chuva perdido em cada mão. Prefere ficar de frente para o quadro-negro e dar as costas ao auditório. Escreve *a*, diz *b*, quer dizer *c*, quando deveria ser *d*. Alguns dos seus ditos são passados de geração a geração.

"Para resolver esta equação diferencial, basta olhar bem para ela até que lhe ocorra uma solução."

"Este princípio é tão perfeitamente genérico que é impossível aplicá-lo a qualquer caso particular."

"A Geometria é a arte de raciocinar corretamente sobre figuras incorretas."

"O meu método para superar dificuldades é contorná-las."

"Qual é a diferença entre um método e um artifício? Um método é um artifício que se usa duas vezes."

No final das contas, é sempre possível aprender alguma coisa com o professor tradicional. Tenhamos a esperança de que o professor de Matemática com o qual nada se possa aprender não se torne tradicional.

O solucionador de problemas inteligente muitas vezes faz a si próprio indagações semelhantes às constantes da nossa lista. Talvez tenha, ele mesmo, descoberto perguntas desse tipo ou, tendo ouvido de outrém uma tal pergunta, haja por si descoberto a sua utilização apropriada. Possivelmente ele não tem consciência de que repete sempre a mesma indagação estereotipada. Ou a indagação é sua favorita: ele sabe que ela é parte da sua atitude mental apropriada a uma determinada fase do seu trabalho e assume a atitude certa ao fazer a indagação certa.

O solucionador de problemas inteligente poderá achar úteis as indagações e sugestões da nossa lista. Poderá bem compreender as explicações e os exemplos que ilustram uma certa indagação, poderá perceber a utilização adequada da pergunta. Mas não poderá ter plena compreensão até que se defronte, no seu próprio trabalho, com o procedimento que a indagação procura provocar e, verificando por experiência própria a sua utilidade, descubra por si mesmo a utilização apropriada da pergunta.

O solucionador de problemas inteligente deverá estar preparado para fazer todas as indagações da lista, mas não deverá fazer nenhuma delas a menos que seja levado a isso pelo exame cuidadoso do problema que se apresenta e pelo seu próprio discernimento isento. De fato, ele mesmo deverá verificar se a presente situação é ou não suficientemente semelhante a uma outra em que viu a indagação aplicada com sucesso.

O solucionador de problemas inteligente procura, antes de tudo, compreender o problema tanto quanto possível completa e claramente. Isto não é, no entanto, suficiente: é preciso que ele almeje sinceramente chegar à solução. Se não tiver um real anseio de resolver o problema, será melhor deixá-lo de lado. O verdadeiro segredo do sucesso consiste em consagrar toda a sua personalidade ao problema.

Pappus, grande matemático grego, viveu provavelmente em torno do ano 300 de nossa era. No Livro VII, das suas *Collectiones*, Pappus descreve um ramo de estudo que ele chamou de *analyomenos*. Podemos traduzir este nome por "Tesouro da Análise", ou "Arte de Resolver Problemas" ou, mesmo, "Heurística". Esta última denominação parece aqui preferível. Segue-se uma versão livre do texto original:

"A chamada Heurística é, em suma, um corpo especial de doutrina para uso daqueles que, depois de terem estudado os Elementos comuns, desejam adquirir a capacidade de resolver problemas matemáticos e somente serve para este fim. É resultado do trabalho de três homens: Euclides, o autor dos Elementos, Apolônio de Perga e Aristeu, o Antigo. Ela ensina os procedimentos da análise e da síntese.

"Na análise, começamos por aquilo de que se precisa e que admitimos como certo e extraímos conseqüências disso e conseqüência das conseqüências até chegarmos a um ponto que podemos usar como de partida da síntese. Porque na análise admitimos que o que precisa ser feito já o foi (o que se procura já foi encontrado, o que se tem a demonstrar é verdadeiro). Indagamos de qual antecedente poderá ser deduzido o resultado desejado; em seguida, indagamos de novo qual poderá ser o antecedente desse antecedente e assim por diante, até chegarmos finalmente a algo que já conhecemos ou que admitimos como verdadeiro. A este procedimento chamamos análise, ou regressão ou raciocínio regressivo.

"Mas na síntese, invertendo o processo, partimos do último ponto a que chegamos na análise, daquilo que já sabemos ou admitimos como verdadeiro. Disso deduzimos o que o precedeu na análise e continuamos a fazer deduções até que, percorrendo o mesmo caminho no outro sentido, conseguimos finalmente chegar aonde queríamos. A este procedimento chamamos síntese, ou resolução construtiva ou raciocínio progressivo.

"Ora, há dois tipos de análise: um, é a análise de "problemas de demonstração" e visa a estabelecer a verdade dos teoremas; o outro, é a análise dos "problemas de determinação", que visa a encontrar as incógnitas.

"Quando se trata de um "problema de demonstração", temos de demonstrar ou refutar um teorema claramente enunciado A . Não sabemos ainda se A é verdadeiro ou falso, mas deduzimos de A um outro teorema B , de B um outro C e assim sucessivamente, até chegarmos a um último teorema L , acerca do qual temos um conhecimento definitivo. Se L for verdadeiro, A também o será, desde que todas as nossas deduções forem conversíveis. A partir de L , deduzimos o teorema K , que precedeu L na análise e, procedendo da mesma maneira, retrocedemos: de C demonstramos B , de B demonstramos A e assim chegamos ao nosso objetivo. Se, porém L for falso, teremos demonstrado que A é falso.

"Tratando-se de um "problema de determinação", temos de encontrar uma certa incógnita x que satisfaça uma condicionante claramente enunciada. Não sabemos ainda se é possível que alguma coisa satisfaça ou não a condicionante. Mas, admitindo que há um valor de x que satisfaz a condicionante, dela deduzimos uma outra incógnita y que tem de satisfazer uma condicionante correlata. Em seguida, correlacionamos y com uma nova incógnita e assim sucessivamente, até chegarmos a uma última incógnita z que podemos encontrar por algum método conhecido. Se realmente houver um z que satisfaça a condicionante e ele imposta, haverá também um x que satisfará a condicionante original, desde que todas as nossas deduções forem conversíveis. Encontramos primeiro z ; em seguida, conhecendo z , encontramos a incógnita que precedeu z na análise; procedendo da mesma maneira, retrocedemos e finalmente, conhecendo y , obtemos x , que é o nosso objetivo. Se, porém, nada houver que satisfaça a condicionante imposta a z , o problema relativo a x não tem solução".

Não devemos esquecer que esta citação não é uma tradução literal e sim uma versão livre, uma *paráfrase*. Diversas diferenças que existem entre esta paráfrase e o original merecem alguns comentários, pois o texto de Pappus é muito importante por vários motivos.

1. A nossa paráfrase usa uma terminologia mais definitiva que o original e introduz os símbolos $A, B, \dots L, x, y, \dots z$, que não aparecem no original.

2. A paráfrase diz (pág. 104, linha 8) “problemas matemáticos”, onde no original aparece “problemas geométricos”. Isto destaca que os procedimentos descritos por Pappus não estão, de modo algum, restritos a problemas de Geometria. De fato, eles não se restringem nem mesmo a problemas da Matemática. Passamos a ilustrar esta afirmação por meio de exemplos, pois, nesta questão, a generalidade e a independência do assunto específico são de grande importância (ver a seção 3).

3. *Exemplo algébrico.* Determinar o valor de x que satisfaz a equação

$$8(4^x + 4^{-x}) - 54(2^x + 2^{-x}) + 101 = 0.$$

Trata-se de um “problema de determinação” não muito fácil para um principiante. Ele precisa estar familiarizado com a idéia da análise. Não, é evidente, com a palavra “análise”, mas sim com a idéia de chegar ao objetivo pela redução sucessiva. Além disso, tem de conhecer os tipos mais simples de equações. Mesmo com alguns conhecimentos, é preciso surgir uma boa idéia, um pouco de sorte, um pouco de invenção, para observar que, como $4^x = (2^x)^2$ e $4^{-x} = (2^x)^{-2}$, pode haver vantagens em introduzir

$$y = 2^x.$$

Ora, esta substituição é realmente vantajosa, pois a equação em y assim obtida

$$8\left(y^2 + \frac{1}{y^2}\right) - 54\left(y + \frac{1}{y}\right) + 101 = 0.$$

parece mais simples do que a equação original. Mas não terminou a nossa tarefa. É preciso uma outra pequena invenção, uma outra substituição

$$z = y + \frac{1}{y}$$

que transforma a condicionante em

$$8z^2 - 54z + 85 = 0.$$

Aqui cessa a análise, desde que o solucionador do problema saiba resolver uma equação do segundo grau.

Em que consiste a síntese? Em executar, passo a passo, os cálculos cuja possibilidade foi indicada pela análise. O solucionador não necessita de nenhuma outra idéia para concluir a resolução, apenas de alguma paciência e de atenção ao calcular as várias incógnitas. A ordem dos cálculos é inversa à ordem da invenção: primeiro calcula-se z ($z = 5/2, 17/4$), em seguida y ($y = 2, 1/2, 4, 1/4$) e, finalmente, a incógnita originalmente procurada x ($x = 1, -1, 2, -2$). A síntese retrocede pelos passos da análise e, por este exemplo, é fácil de ver porque assim é.

4. *Exemplo não-matemático.* Um homem primitivo deseja atravessar um riacho, mas não pode fazê-lo da maneira habitual porque o nível da água subiu desde a véspera. Por isso, a travessia tornou-se o objeto de um problema: "a travessia do riacho" é o x deste problema primário. O homem pode lembrar-se de já ter atravessado algum outro riacho por uma árvore caída. Ele procura ao redor uma árvore caída que lhe sirva, a qual se torna a sua nova incógnita, o seu y . O homem não encontra nenhuma nessas condições, mas há muitas árvores em pé à margem do riacho; ele deseja que uma delas caia. Ser-lhe-ia possível fazer uma árvore cair atravessada sobre o riacho? Surgem uma grande idéia e uma nova incógnita: por que meios poderia o homem derrubar a árvore por sobre o riacho?

Esta sequência de idéias deve chamar-se análise, se aceitamos a terminologia de Pappus. Se o homem primitivo conseguir concluir a sua análise, ele poderá tornar-se o inventor da ponte e do machado. Qual será a síntese? A tradução das idéias em ações. O ato final da síntese será a passagem do homem por sobre a árvore através do riacho.

Os nossos objetos comparecem na análise e na síntese; eles exercitam o raciocínio do homem na análise e os seus músculos na síntese. A análise consiste em pensamentos; a síntese, em atos. Há uma outra diferença: as respectivas ordens são inversas. A travessia do riacho é o primeiro desejo, do qual parte a análise, e é o último ato, com o que se conclui a síntese.

5. A paráfrase indica, com um pouco mais de clareza do que o original, a conexão natural que existe entre análise e síntese, a qual se evidencia pelos exemplos precedentes. A análise vem naturalmente em primeiro lugar, a síntese vem depois; a análise é invenção e a síntese, execução; *a análise consiste em conceber um plano e a síntese, em executá-lo.*

6. A paráfrase preserva, e mesmo dá ênfase, a certas frases curiosas do original: "admitindo que o que precisa ser feito já o foi, o que se procura já foi encontrado, o que se tem a demonstrar é verdadeiro". Isto é paradoxal, pois não estaremos iludindo a nós próprios ao admitirmos que o problema que temos a resolver já está resolvido? Isto é confuso, o que quer dizer? Se considerarmos atentamente o contexto e procurarmos honestamente compreender a nossa própria experiência na resolução de problemas, não haverá dúvidas quanto ao significado.

Consideremos, primeiro, um, "problema de determinação". Chamemos a incógnita de x e os dados de a, b, c . "Admitir o problema como resolvido" significa presumir que haja um objeto x que satisfaz a condicionante — isto é, cujas relações com os dados a, b, c são aquelas impostas pela condicionante. Esta suposição é feita apenas para dar início à análise, é provisória e a nada prejudica. Porque, se não houver um tal objeto e se a análise não nos levar a parte alguma, na certa chegaremos a um problema final insolúvel, o que evidenciará que o nosso original não tem solução. A suposição é, portanto, útil. Para examinarmos a condicionante, temos de conceber, de representar para nós mesmos, ou de visualizar geometricamente, aquelas relações entre x e a, b, c impostas pela condicionante. Como então poderíamos fazer isto sem conceber, representar ou visualizar x como existente? Finalmente, a suposição é natural. O homem primitivo, cujos pensamentos e atos comentamos no item 4, imagina-se a atravessar o riacho andando por sobre uma árvore caída, antes de realmente poder fazê-lo; ele vê o seu problema "como resolvido".

O objeto de um "problema de demonstração" é demonstrar um determinado teorema A . O conselho de "admitir A como verdadeiro" é apenas um convite a tirar conclusões sobre o teorema A , embora não o tenhamos ainda demonstrado. As pessoas que têm um certo caráter mental e uma certa filosofia podem recusar-se a tirar conclusões de um teorema ainda não demonstrado, mas elas serão incapazes de dar início a uma análise (ver FIGURAS, 2)

7. A paráfrase emprega duas vezes a importante frase "desde que todas as deduções forem conversíveis" (pág. 104 linhas 31.2 e pág. 104 linhas 42.3). Trata-se de uma interpolação, pois no original nada disso aparece e a falta de uma tal ressalva tem sido observada e criticada nos tempos modernos. Para uma noção de "redução conversível", ver PROBLEMA AUXILIAR, 6.

8. A análise de "problemas de demonstração" é descrita na paráfrase com palavras muito diferentes daquelas usadas no original, mas sem alteração do sentido; pelo menos, não houve intenção de alterar o sentido original. A análise de "problemas de determinação" é, no entanto, explicada muito mais objetivamente na paráfrase do que no original. Este parece ter visado à descrição de um procedimento algo mais genérico, qual seja o preparo de uma *cadeia de problemas auxiliares equivalentes*, que é abordada em PROBLEMA AUXILIAR, 7.

9. Muitos livros elementares de Geometria contêm algumas observações sobre análise, síntese e "admitindo o problema como resolvido". Não há dúvida que esta tradição quase inextirpável remonta a Pappus, embora dificilmente se encontre um livro didático atual cujo autor revele qualquer conhecimento direto de Pappus. O assunto é bastante importante para ser mencionado em livros elementares, mas é também facilmente mal compreendido. Basta a circunstância de que ele se restringe a livros de Geometria para mostrar a atual falta de compreensão (ver comentários no item 2, acima). Se estes comentários puderem contribuir para melhor compreensão deste assunto, a sua extensão ficará plenamente justificada.

Para um outro exemplo, de um ponto de vista diferente, e mais comentários, ver REGRESSÃO.

Comparar também com DEMONSTRAÇÃO POR ABSURDO E DEMONSTRAÇÃO INDIRETA.

Paradoxo da invenção. É possível que, quanto mais ambicioso for o plano, maiores sejam as suas probabilidades de sucesso.

Esta afirmação parece paradoxal. No entanto, quando passamos de um problema para outro, muitas vezes observamos que é mais fácil lidar com o novo problema, mais ambicioso. É possível que seja mais fácil responder a muitas perguntas do que a uma só. O teorema mais abrangente pode ser fácil de demonstrar; o problema mais genérico, mais fácil de resolver.

O paradoxo desaparece se examinarmos mais de perto alguns exemplos (ver GENERALIZAÇÃO, 2; INDUÇÃO E INDUÇÃO MATEMÁTICA, 7). O plano mais ambicioso poderá ter maiores possibilidades de sucesso, desde que ele não esteja baseado em simples pretensão, mas sim na visão de coisas para além daquelas imediatamente próximas.

Particularização é a passagem da consideração de um dado conjunto de elementos para a consideração de um conjunto maior, ou para a de apenas um dos elementos contidos no conjunto dado. A particularização revela-se, muitas vezes, útil na resolução de problemas.

1. *Exemplo.* Num triângulo, sejam r o raio do círculo inscrito; R o raio do círculo circunscrito e H a maior altura. Nessas condições

$$r + R \leq H.$$

Temos a demonstrar (ou a refutar) este teorema.* Temos assim um "problema de demonstração".

O teorema proposto é incomum. Não nos lembramos de nenhum teorema relativo a triângulos que tenha uma semelhante conclusão. Se nada mais nos ocorrer, poderemos verificar algum *caso particular* desta estranha afirmativa. Ora, o mais conhecido triângulo particular é o equilátero, para o qual

$$r = \frac{H}{3} \qquad R = \frac{2H}{3}$$

de modo que, neste caso, a afirmativa está correta.

* Do *American Mathematical Monthly*, vol. 50 (1943), pág. 124 e vol. 51 (1944), págs. 234-236.

Se não surgir outra idéia, poderemos verificar o *caso particular mais amplo* do triângulo isósceles. A forma deste varia com o ângulo do vértice e há dois casos extremos (ou limites); um, no qual aquele ângulo se reduz a 0° , e o outro em que o ângulo se torna 180° . No primeiro caso extremo, a base do triângulo isósceles desaparece e, portanto,

$$r = 0 \qquad R = \frac{l}{2}$$

ficando assim verificada a afirmativa. No segundo caso-limite, porém, desaparecem todas as três alturas e

$$r = 0 \qquad R = \infty \qquad H = 0.$$

A afirmativa não se verifica. Demonstramos que o teorema proposto é falso e assim fica resolvido o nosso problema.

A propósito, é claro que a afirmativa é também falsa para triângulos isósceles muito raros, com ângulos nos vértices próximos de 180° , de modo que podemos "oficialmente" desprezar os casos extremos cuja consideração não nos pareça muito "ortodoxa".

2. "*L'exception confirme la règle*". Precisamos aceitar este ditado, tão difundido, como uma brincadeira que ridiculariza o desleixo de certo tipo de lógica. Se tomarmos as coisas a sério, bastará uma exceção para refutar irrevogavelmente qualquer regra ou enunciado genérico. O método mais comum e, sob certos aspectos, melhor para refutar um tal enunciado consiste precisamente em encontrar um elemento que não o satisfaça. Um tal elemento é chamado de *contra-exemplo* por alguns autores.

O enunciado pretensamente genérico é relativo a um certo conjunto de elementos; para refutá-lo, *particularizamos*, isto é, retiramos do conjunto um elemento que não o satisfaça. O exemplo precedente (item 1) mostra como isto se faz. Podemos primeiro examinar qualquer simples caso particular, escolhido mais ou menos ao acaso, que possamos verificar com facilidade. Se o teste revelar que o caso não está de acordo com o enunciado genérico, este fica refutado e a nossa incumbência, concluída. Se, porém, o elemento examinado satisfizer o enunciado, poderemos do seu exame deduzir alguma indicação. Podemos receber a impressão de que o enunciado poderia ser, no final das contas, verdadeiro e, também, alguma sugestão quanto à direção a tomar para procurar a demonstração. Ou, então, podemos perceber alguma sugestão que nos leve a um contra-exemplo, isto é, a outros casos particulares que devemos verificar. Podemos modificar o caso que acabamos de examinar, variá-lo, investigar algum caso particular mais amplo, procurar casos extremos, como exemplificado no item 1.

Os casos extremos são particularmente instrutivos. Se um enunciado genérico pretender aplicar-se a todos os mamíferos, ele deverá se aplicar até aos mamíferos excepcionais, como a baleia. Não esqueçamos este caso extremo da baleia. Do seu exame, poderemos refutar o enunciado genérico; há uma boa probabilidade disso, pois os inventores de generalizações tendem a esquecer estes casos extremos. Se, no entanto, verificarmos que o enunciado geral se aplica até a casos extremos, a evidência indutiva derivada desta verificação será forte, exatamente porque era forte a perspectiva de refutação. Ficamos, assim, tentados a reformular o ditado com que iniciamos este item: "As prováveis exceções põem à prova a regra".

3. *Exemplo.* São dadas as velocidades de dois navios e as respectivas posições num determinado momento. Ambos os navios seguem rumos retilíneos, a velocidades constantes. Calcular a distância entre os dois navios no momento em que eles estiverem mais próximos um do outro.

Qual é a incógnita? A menor distância entre dois corpos em movimento. Os corpos devem ser considerados como pontos materiais.

Quais são os dados? As posições dos pontos materiais móveis e as respectivas velocidades. Estas são constantes em grandeza e sentido.

Qual é a condicionante? A distância tem de ser determinada no instante que ela for mínima, isto é, no momento em que os dois pontos móveis (os navios) estiverem mais próximos um do outro.



Figura 19

Trace uma figura. Adote uma notação adequada. Na figura 19, os pontos A e B assinalam as posições iniciais dadas dos dois navios. Os segmentos de retas orientadas (vetores) AP e BQ representam as velocidades dadas, de modo que o primeiro navio desloca-se segundo a reta que passa pelos pontos A e P e percorre a distância AP na unidade de tempo. O segundo navio desloca-se analogamente, segundo a reta BQ .

Qual é a incógnita? A menor distância entre os dois navios, aquele que se desloca segundo AP e o outro, segundo BQ .

Está claro agora o que devemos encontrar. No entanto, se desejarmos empregar apenas meios elementares, é possível que continuemos no escuro quanto à maneira de encontrar o que queremos. O problema não é muito fácil e a sua dificuldade apresenta um matiz peculiar, cuja descrição podemos tentar, dizendo que "há variedade demais". As posições iniciais e finais, A e B e as velocidades AP e BQ podem ser dadas de várias maneiras. De fato, os quatro pontos A, B, P e Q podem ser escolhidos arbitrariamente. Ora, quaisquer que sejam os dados, a solução pedida deve ser aplicável e não sabemos ainda como ajustar uma mesma solução a todas estas possibilidades. Deste sentimento de "variedade demais", podem emergir finalmente a pergunta e a resposta seguintes:

É possível imaginar um problema correlato mais acessível? Um problema mais particular? Naturalmente, há o caso extremo em que uma das velocidades é nula. Sim, o navio pode estar ancorado em B , Q pode coincidir com B . A menor distância entre o navio imóvel e o navio em movimento é a perpendicular à reta segundo a qual se desloca este último.

4. Se a idéia anterior surgir com a premonição de que há mais coisas pela frente e com o sentimento de que o caso particular extremo (o qual poderia parecer simples demais para ser relevante) tem alguma função a desempenhar — então ela será mesmo uma idéia brilhante.

Eis um problema correlato, o problema particular que acaba de ser resolvido. É possível utilizá-lo? É possível utilizar o seu resultado? Deve-se introduzir algum elemento auxiliar para tornar possível a sua utilização? Ele deve ser utilizado, mas como? Como poderia o resultado do caso em que B está em repouso ser utilizado no caso em que B está em movimento? O repouso é um *caso particular* do movimento. E o movimento é relativo — e, portanto, qualquer que seja a dada velocidade de B , posso considerar B como estando em repouso! Eis a idéia com maior clareza: se eu imprimi ao sistema inteiro, que compreende ambos os navios, o mesmo movimento uniforme, as posições relativas não variam, as distâncias relativas permanecem as mesmas e o mesmo ocorre particularmente com a menor distância relativa entre os dois navios, pedida no problema. Ora, posso imprimir um movimento que reduza a zero a velocidade de um dos navios, reduzindo assim o caso geral do problema ao caso particular recém-resolvido. Acrescentemos uma velo-

passos se tivéssemos a sorte de encontrar no meio da travessia uma pedra adequada para firmar o pé.

Em suma, utilizamos o problema auxiliar, menos difícil, menos ambicioso, particular, como um *intermediário* na resolução do problema original, mais difícil, mais ambicioso, genérico.

6. A particularização tem muitas outras aplicações que não podemos discutir aqui. Basta mencionar que ela pode ser útil na verificação da solução (É POSSÍVEL VERIFICAR O RESULTADO? 2).

Um certo tipo algo primário de particularização é muitas vezes de utilidade para o professor. Consiste em dar uma *interpretação concreta* aos elementos matemáticos abstratos do problema. Por exemplo, se houver um paralelepípedo retângulo no problema, o professor poderá tomar a sala de aulas como exemplo (seção 8). Na Geometria Espacial, um canto da sala pode servir de origem das coordenadas, o assoalho e duas paredes como planos coordenados, duas arestas horizontais da sala e uma vertical como eixos coordenados. Ao explicar a noção de superfície de revolução, o professor traça a giz uma curva na porta e abre-a lentamente. Estes são, evidentemente, recursos simples, mas nada que puder incutir o interesse pela Matemática nos estudantes deverá ser omitido. Por ser a Matemática uma ciência muito abstrata, a sua apresentação precisa ser muito concreta.

Pedantismo e mestria são atitudes opostas, em relação às regras.

1. A aplicação literal, rígida, sem exame, de uma regra, quer ela se aplique ou não ao caso, é pedantismo. Alguns pedantes são uns pobres tolos; nunca compreenderam a regra que aplicam tão conscienciosa e indiscriminadamente. Outros pedantes são bem sucedidos; escolheram uma boa regra, que compreenderam (antes de se tornarem pedantes) e que se aplica a muitos casos e só raramente falha.

A aplicação de uma regra com naturalidade, com discernimento, observando os casos aos quais ela é aplicável e sem jamais deixar o enunciado da regra obscurecer o objetivo da ação ou as oportunidades da situação, é mestria.

2. As indagações e sugestões da lista contida neste livro podem ser úteis tanto aos solucionadores de problemas quanto aos professores. Mas, em primeiro lugar, elas devem ser compreendidas, a sua aplicação adequada deverá ser aprendida, e aprendida por tentativas, pela experiência na sua aplicação. Em segundo, o seu uso nunca deve tornar-se pedante. Não deve fazer qualquer indagação, qualquer sugestão, indiscriminadamente, só por hábito rígido. Prepare-se para muitas indagações e sugestões e use o seu discernimento. Se tiver um problema difícil mas estimulante, o próximo passo deverá ser motivado pela consideração atenta e compreensiva do problema, tal como ele se apresenta. Se o professor desejar ajudar seus alunos, precisará demonstrar-lhes que compreende muito bem suas dificuldades.

Quem tiver tendência ao pedantismo e precisar apoiar-se em regras, aprenda esta: use sempre, em primeiro lugar, a sua cabeça.

Persistência, esperança, sucesso. Seria um engano supor que a resolução de problemas seja puramente uma "questão intelectual": persistência e emoções desempenham, nesse caso, um papel importante. Fraqueza de vontade e aquiescência por comodismo para fazer um pouquinho podem bastar para um problema rotineiro na sala de aulas. Mas, para resolver um problema científico sério, é necessária uma força de vontade capaz de sobreviver a anos de trabalho e decepções amargas.

1. A persistência flutua entre esperança e desespero, entre satisfação e decepção. É fácil prosseguir quando se pensa que a solução se encontra na primeira esquina, mas é difícil perseverar quando não se vê uma saída para a dificuldade. Exultamos quando a nossa previsão se confirma. Ficamos desalentados quando o caminho que vimos seguindo com certa confiança é repentinamente bloqueado e, aí, a nossa persistência fraqueja.

"Il n'est point besoin espérer pour entreprendre ni réussir pour persévérer."
"É possível empreender sem esperança e perseverar sem sucesso". Assim pode falar uma vontade inflexível, ou honra e dever, ou um fidalgo movido por uma causa nobre. Este tipo de persistência não serve, porém, para o cientista, que deverá ter alguma esperança para principiar e algum sucesso para prosseguir. No trabalho científico, é necessário dosar judiciosamente a persistência de acordo com as perspectivas. Não ataque um problema se ele não apresentar algum interesse; decida-se a trabalhar seriamente se o problema parecer instrutivo; se ele for muito promissor, consagre-lhe toda a sua personalidade. Uma vez determinado o objetivo, apegue-se a ele, porém não o torne desnecessariamente difícil para si próprio. Não despreze pequenos êxitos; pelo contrário, procure-os: *Se não puder resolver o problema proposto, tente primeiro resolver algum problema correlato.*

2. Quando um estudante comete erros realmente tolos ou é irritantemente vagaroso, a causa é sempre a mesma: ele não tem qualquer desejo de resolver o problema, nem mesmo deseja entendê-lo adequadamente e, por isso, não chegou sequer a compreendê-lo. Portanto, o professor que realmente deseja ajudar o aluno deve, antes de tudo, estimular a sua curiosidade, incutir-lhe certo desejo de resolver o problema. O professor deve também conceder algum tempo ao aluno, para que ele tome a decisão e se dedique à sua tarefa.

Ensinar a resolver problemas é educar a vontade. Na resolução de problemas que, para ele, não são muito fáceis, o estudante aprende a perseverar a despeito de insucessos, a apreciar pequenos progressos, a esperar pela idéia essencial e a concentrar todo o seu potencial quando esta aparecer. Se o estudante não tiver, na escola, a oportunidade de se familiarizar com as diversas emoções que surgem na luta pela solução, a sua educação matemática terá falhado no ponto mais vital.

Por que demonstrar? Conta-se que Newton, quando estudante, começou a aprender Geometria, como era habitual no seu tempo, pela leitura dos *Elementos* de Euclides. Ele estudou os teoremas, viu que eram verdadeiros e omitiu as demonstrações. Não entendia porque alguém se dava ao trabalho de demonstrar coisas tão evidentes. Muitos anos mais tarde, porém, ele mudou de opinião e fez o elogio de Euclides.

A estória pode ou não ser autêntica, mas a dúvida permanece: por que aprender, ou ensinar, demonstrações? O que é preferível: nada demonstrar, demonstrar tudo ou só demonstrar algumas coisas? Se somente algumas coisas, quais delas?

1. *Demonstrações completas.* Para o lógico de um certo tipo, somente existem demonstrações completas. Aquilo que pretender ser uma demonstração não deverá deixar nenhuma lacuna, nenhuma escapatória, nenhuma incerteza, pois do contrário não será uma demonstração. Será possível encontrar nas atividades diárias, nos processos legais ou nas ciências físicas, demonstrações que satisfaçam tão rigorosas exigências? Dificilmente. Assim sendo, não é fácil compreender porque precisamos adquirir a idéia de uma demonstração tão rigorosamente completa.

Podemos dizer, com certo exagero, que esta idéia foi transmitida à humanidade por um homem e um livro: Euclides e seus *Elementos*. De qualquer modo, o estudo dos elementos da Geometria Plana ainda proporciona a melhor oportunidade de adquirir a noção de demonstração rigorosa.

Tomemos como exemplo a demonstração do teorema: *Em qualquer triângulo, a soma dos três ângulos é igual a dois ângulos retos.** A figura 21, que constitui uma propriedade inalienável de quase todos nós, precisa de pouca explicação. Faz-se passar pelo vértice *A* uma linha paralela ao lado *BC*. Os ângulos *B* e *C* do triângulo

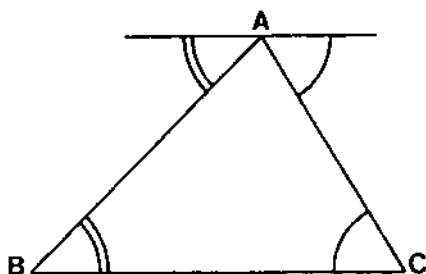


Figura 21

* Parte da Proposição 32, do Livro I dos *Elementos* de Euclides. A demonstração que segue não é de Euclides, mas era bem conhecida dos gregos.

são iguais a certos ângulos em A , como se destaca na figura, pois os ângulos alternos são em geral iguais. Os três ângulos do triângulo são iguais aos três ângulos que têm o vértice comum em A e que formam um ângulo de 180° , ou dois ângulos retos. Fica assim demonstrado o teorema.

Se o estudante houver passado pelas aulas de Matemática sem ter realmente entendido algumas demonstrações semelhantes a esta, ele terá todo o direito de fazer as mais cáusticas censuras à sua escola e a seus professores. De fato, se o aluno não tiver aprendido este ou aquele fato geométrico específico, não terá perdido muito. Mas se ele não se houver familiarizado com as demonstrações geométricas, terá deixado escapar os melhores e mais simples exemplos das verdadeiras provas e perdido a melhor oportunidade de adquirir a idéia do raciocínio rigoroso. Sem esta idéia, faltar-lhe-á o verdadeiro critério para comparar argumentos de todos os tipos que se lhe apresentam na moderna vida cotidiana.

Em suma, se a educação pretender inculcar no estudante as noções da prova intuitiva e do raciocínio lógico, ela deverá reservar um lugar para as demonstrações geométricas.

2. *Sistema lógico.* A Geometria, tal como apresentada nos *Elementos*, de Euclides, não é uma simples coleção de fatos, mas sim um sistema lógico. Os axiomas, as definições e as proposições não estão relacionadas em sequência aleatória, mas sim dispostos em perfeita ordem. Cada proposição está de tal maneira situada que ela pode basear-se nos axiomas, definições e proposições que a precedem. Podemos considerar a disposição ordenada das proposições como o maior sucesso de Euclides e o seu sistema lógico como o maior mérito dos *Elementos*.

A Geometria euclidiana é, não somente um sistema lógico, como também o primeiro e grande exemplo de um tal sistema, que outras ciências têm tentado, e continuam tentando, imitar. Deverão as demais ciências — particularmente aquelas mais distanciadas da Geometria, como a Psicologia ou o Direito — imitar a rígida lógica de Euclides? Trata-se de uma questão discutível, mas ninguém terá competência para tomar parte na discussão se não conhecer o sistema euclidiano.

Ora, o sistema da Geometria está cimentado por demonstrações. Cada proposição está relacionada a axiomas, definições e proposições que precedem uma demonstração. Sem compreendermos essas demonstrações não poderemos entender a própria essência do sistema.

Em suma, se a educação pretende inculcar no estudante a noção de sistema lógico, deve reservar um lugar para as demonstrações geométricas.

3. *Sistema mnemônico.* O autor não acha que as idéias de evidência intuitiva, raciocínio rigoroso e sistema lógico sejam supérfluas a ninguém. Há, porém, casos em que o estudo dessas idéias não é considerado absolutamente necessário, devido à falta de tempo ou por motivos outros. Mas, até mesmo nestes casos, as demonstrações fazem-se necessárias.

As demonstrações proporcionam evidência e, assim, mantêm coeso o sistema lógico, ajudando-nos a lembrar dos vários itens mantidos em coesão. Tome-se o exemplo acima exposto, relativo à figura 21. Esta figura evidencia o fato de que a soma dos ângulos de um triângulo é igual a 180° . A figura relaciona este fato com o outro, de que ângulos alternos são iguais. Ora, fatos correlacionados são mais interessantes, e é mais fácil retê-los, do que fatos isolados. Assim, a figura fixa em nossa mente as duas proposições geométricas correlacionadas e, por fim, a figura e as proposições tornam-se de nossa inalienável propriedade mental.

Chegamos agora ao caso em que a aquisição de idéias gerais não é considerada necessária, só se desejam certos fatos. Mesmo em tal caso, os fatos devem ser apresentados com alguma correlação, de certa forma sistemática, pois a aquisição de itens isolados é penosa e estes passam a ser facilmente esquecidos. Qualquer espécie de conexão que estabeleça a união dos fatos de maneira simples, natural e durável é aqui bem recebida. O sistema não precisa, neste caso, basear-se na lógica, basta que ele seja preparado para ajudar eficazmente a memória, que constitua o que se chama um *sistema mnemônico*. No entanto, mesmo do ponto de vista de um sistema puramente mnemônico, as demonstrações podem ser úteis, especialmente as mais simples. Por exemplo, o estudante precisa aprender o fato relativo à soma dos ângulos do triângulo e aquele outro referente a ângulos alternos. Existirá um meio mais simples, mais natural e mais eficaz de reter tais fatos do que a figura 21?

Em suma, mesmo quando não se atribui importância especial às idéias lógicas gerais, as demonstrações podem ser úteis como um recurso mnemônico.

4. *O sistema do livro de receitas.* Discutimos neste livro as vantagens das demonstrações, mas certamente não propomos que todas elas sejam dadas *in extenso*. Pelo contrário, há casos em que isto é muito difícil. Um exemplo importante é o ensino do Cálculo Diferencial e Integral nos cursos de Engenharia.

Se o Cálculo for apresentado de acordo com os modernos padrões de rigor, ele exigirá demonstrações de um certo grau de exatidão e sutileza. Mas os engenheiros estudam o Cálculo com vistas à sua aplicação e não dispõem de bastante tempo, preparo ou interesse para se debaterem em demonstrações rigorosas, nem para apreciar sutilezas. Assim sendo, surge uma forte tentação de eliminar todas as demonstrações. Mas se o fizermos, reduziremos o Cálculo ao nível do livro de receitas.

O livro de cozinha fornece uma descrição detalhada dos ingredientes e dos procedimentos, mas não dá nenhuma demonstração ou razão para as receitas: prova-se o pudim, comendo-o. O livro de cozinha pode servir perfeitamente aos seus fins. De fato, ele não precisa de qualquer sistema lógico ou mnemônico, pois as receitas estão escritas e impressas, não precisando ficar retidas na memória.

O autor de um livro de Cálculo, ou o professor universitário, mal poderá atingir os seus objetivos se seguir muito de perto o sistema do livro de receitas.

Se ele ensinar procedimentos sem demonstrações, os procedimentos desmotivados não serão entendidos. Se ele enunciar regras sem mostrar as suas razões, as regras desconexas serão rapidamente esquecidas. A Matemática não pode ser provada da mesma maneira que o pudim: se todas as demonstrações forem afastadas, um curso de Cálculo poderá facilmente se transformar num repositório incoerente de informações indigestas.

5. *Demonstrações incompletas.* A melhor maneira de resolver o dilema que se apresenta entre demonstrações muito complexas, de um lado, e o nível do livro de receitas, do outro, poderá ser o aproveitamento razoável de demonstrações incompletas.

Para um lógico rigoroso, dar uma demonstração incompleta é a mesma coisa que nada demonstrar. De qualquer maneira, as demonstrações incompletas precisam ser cuidadosamente distinguidas das demonstrações completas. Se é mau confundi-las, fazer passar uma pela outra é ainda pior. É doloroso quando o autor de um livro didático apresenta ambigualmente uma demonstração incompleta, com visível hesitação entre o acanhamento e a pretensão de que a demonstração é completa. Mas as demonstrações incompletas podem ser úteis quando usadas, com discernimento, no lugar adequado. O seu objetivo não é substituir as demonstrações completas, o que seria impossível, mas sim emprestar interesse e coerência à apresentação.

Exemplo 1. *Uma equação algébrica de grau n tem exatamente n raízes.* Esta proposição, chamada por Gauss de Teorema Fundamental da Álgebra, pode muitas vezes ser apresentada a estudantes que não estejam preparados para compreender a sua demonstração. Eles sabem, porém, que uma equação do primeiro grau tem uma raiz e que uma outra do segundo grau tem duas raízes. Além disso, a difícil proposição tem uma parte que pode ser facilmente mostrada: *nenhuma equação do grau n tem mais de n raízes.* Será que os fatos mencionados constituem uma demonstração completa do Teorema Fundamental? De modo algum. Eles são, no entanto, suficientes para emprestar-lhe um certo interesse e plausibilidade — e para fixá-lo na mente dos estudantes, o que é o mais importante.

Exemplo 2. *A soma de dois, quaisquer, dos ângulos planos formados por arestas de um ângulo do triedro é maior do que o terceiro.* Evidentemente, o teorema importa em afirmar que, *num triângulo esférico, a soma de dois lados quaisquer é maior do que o terceiro.* Feita esta observação, pensamos naturalmente na analogia entre o triângulo esférico e o triângulo retilíneo. Será que estas observações constituem uma demonstração? De modo algum, mas elas nos auxiliam a compreender e a lembrar do teorema proposto.

O nosso primeiro exemplo apresenta um interesse histórico. Durante 250 anos, os matemáticos aceitaram o Teorema Fundamental sem uma demonstração formal — de fato, sem uma base maior do que aquela que acabamos de mencionar. O nosso segundo exemplo indica a ANALOGIA como uma importante fonte de conjecturas.

Na Matemática, assim como nas Ciências Físicas e Naturais, a descoberta muitas vezes é indicada por observação, analogia e indução. Estes meios, utilizados com discernimento no preparo de um argumento heurístico, são de particular interesse para físicos e engenheiros. (Ver também INDUÇÃO E INDUÇÃO MATEMÁTICA, 1, 2, 3).

A função e o interesse das demonstrações incompletas são, até certo ponto, explicados pelo nosso estudo do processo solucinator. Alguma experiência em resolver problemas revela que a primeira idéia de uma demonstração, muitas vezes se apresenta incompleta. A observação mais essencial, a conexão principal, o germe da demonstração podem aí estar, mas os detalhes deverão ser apresentados mais tarde e muitas vezes são perturbadores. Alguns autores, não muitos, têm o dom de apresentar exatamente o germe da demonstração, a idéia principal na sua expressão mais simples, a indicação da natureza dos detalhes remanescentes. Uma tal demonstração, embora incompleta, pode ser muito mais instrutiva do que a demonstração completa apresentada com todos os seus detalhes.

Em suma, as demonstrações incompletas podem ser utilizadas como uma espécie de recurso mnemônico (mas não como substitutos das demonstrações completas), quando o objetivo é uma coerência tolerável na apresentação e não uma rigorosa compatibilidade lógica.

É muito perigoso propor demonstrações incompletas. O seu possível abuso pode, porém, ser mantido dentro de certos limites por meio de algumas regras. Primeiro, se uma demonstração for incompleta, ela deve, em algum lugar, de certa maneira, ser declarada como tal. Segundo, nenhum autor ou professor tem o direito de apresentar uma demonstração incompleta de um teorema a não ser que conheça, ele próprio, a sua demonstração completa.

E é preciso admitir que a apresentação judiciosa de uma demonstração incompleta não é, de forma alguma, fácil.

Problema auxiliar é aquele de que tratamos, não por ele mesmo, mas porque esperamos que o seu tratamento nos auxilie a resolver um outro — o nosso problema original. Este último é o fim a que desejamos chegar; o problema auxiliar é o meio pelo qual tentamos chegar ao nosso objetivo.

Um inseto procura escapar através da vidraça, repete muitas vezes a mesma tentativa e não tenta a janela próxima, por onde ele entrou e que continua aberta. Um homem seria, ou deveria ser, capaz de proceder com mais inteligência. A superioridade humana consiste em contornar os obstáculos que não podem ser superados frontalmente, em conceber um problema auxiliar quando o original parecer insolúvel. A concepção de um problema auxiliar constitui uma importante operação mental. Fazer aparecer um novo problema preciso, subserviente a um outro, é uma refinada manifestação de inteligência. Aprender (ou ensinar) a manipular com inteligência problemas auxiliares é uma tarefa importante.

1. *Exemplo.* Calcular x , que satisfaça a equação

$$x^4 - 13x^2 + 36 = 0.$$

Se observarmos que $x^4 = (x^2)^2$, poderemos ver a vantagem de introduzir

$$y = x^2.$$

Obtemos assim um novo problema: calcular y que satisfaça a equação

$$y^2 - 13y + 36 = 0.$$

O novo problema é auxiliar, pois pretendemos utilizá-lo como um meio de resolver o problema original. A incógnita deste problema auxiliar, y , é apropriadamente chamada de *incógnita auxiliar*.

2. *Exemplo.* Calcular a diagonal de um paralelepípedo retângulo, sendo dados os comprimentos de três arestas traçadas a partir de um mesmo vértice.

Ao procurarmos resolver este problema (seção 8), poderemos ser levados, por analogia (seção 15), a um outro problema: calcular a diagonal de um paralelogramo retângulo, sendo dados os lados traçados a partir de um mesmo vértice.

O novo problema é auxiliar. Nós o consideramos na esperança de, com isto, auferir alguma vantagem para resolver o problema original.

3. *Vantagens.* As vantagens que nos advêm da consideração de um problema auxiliar podem ser de várias espécies. Podemos utilizar o *resultado* do problema auxiliar. Assim, no exemplo 1, uma vez encontrado, pela resolução da equação quadrática em y , que y é igual a 9 ou a 4, concluímos que $x^2 = 4$ ou que $x^2 = 9$ e deduzimos daí todos os possíveis valores de x . Em outros casos, podemos usar o *método* do problema auxiliar. Assim, no exemplo 2, o problema auxiliar é da Geometria Plana, mas embora mais simples, é análogo ao problema original, que é da Geometria Espacial. É razoável introduzir um problema auxiliar deste tipo na esperança de que ele seja instrutivo, que nos dê oportunidade de familiarizarmo-nos com certos métodos, operações ou instrumentos capazes de ser mais tarde utilizados na resolução do problema original. No exemplo 2, a escolha do problema auxiliar foi bem feliz: examinando-o atentamente, verificamos que podemos utilizar tanto o seu método como o seu resultado (Ver seção 15 e UTILIZOU TODOS OS DADOS?)

4. *Riscos.* Roubamos ao problema original o tempo e o esforço que dedicamos ao problema auxiliar. Se o nosso exame deste último fracassar, o tempo e o esforço a ele dedicados poderão ficar perdidos. Por isto, devemos usar discernimento na escolha do problema auxiliar. Precisamos ter inúmeras e boas razões para escolhê-lo. O problema auxiliar pode parecer mais acessível do que o problema original, ou mais instrutivo, ou ter uma espécie de atração estética. Algumas vezes, a única vantagem do problema auxiliar está em ser novo e oferecer possibilidades inexploradas.

radas. A sua escolha resulta do cansaço causado pelo problema original, quando todas as abordagens parecem ter sido esgotadas.

5. *Como encontrar um problema auxiliar.* A descoberta da resolução do problema proposto muitas vezes depende da descoberta de um problema auxiliar. Infelizmente, não há nenhum método infalível para isto, assim como tampouco há qualquer método infalível para descobrir a resolução. Há, porém, indagações e sugestões que são freqüentemente úteis, tais como CONSIDERE A INCÓGNITA; muitas vezes chegamos a um útil problema auxiliar pela VARIAÇÃO DO PROBLEMA.

6. *Problemas equivalentes.* Dois problemas são *equivalentes* quando a resolução de um deles importa na resolução do outro. Assim, no exemplo 1, o problema original e o problema auxiliar são equivalentes.

Considerem-se os seguintes teoremas:

- A. Em qualquer triângulo eqüilátero, todos os ângulos são iguais a 60° .
- B. Em qualquer triângulo eqüiângulo, todos os ângulos são iguais a 60° .

Os dois teoremas não são iguais, pois contêm noções diferentes. Um deles trata da igualdade dos lados e o outro, da igualdade dos ângulos de um triângulo. Mas cada teorema relaciona-se com o outro. Portanto, o problema de demonstrar *A* é equivalente ao problema de demonstrar *B*.

Se tivermos de demonstrar *A*, haverá uma certa vantagem em introduzir, como auxiliar, o problema de demonstrar *B*. Este é um pouco mais fácil de demonstrar do que *B* e, o que é mais importante, podemos *prever* que *B* seja mais fácil do que *A*, podemos assim julgá-lo, achar isto plausível desde o começo. Com efeito, o teorema *B*, que trata apenas de ângulos, é mais "homogêneo" do que o teorema *A*, o qual trata tanto de ângulos como de lados.

A passagem do problema original para o auxiliar é chamada de *redução conversível*, ou *bilateral*, ou *equivalente*, quando ambos, o problema original e o auxiliar, são equivalentes. Deste modo, a redução de *A* para *B* é conversível, assim como a redução do exemplo 1 também o é. As reduções conversíveis são, sob um certo aspecto, mais importantes e mais convenientes do que outras maneiras de introduzir problemas auxiliares, mas mesmo quando estes não são equivalentes aos problemas originais, podem, assim mesmo, ser muito úteis (ver o exemplo 2).

7. *Cadeias de problemas auxiliares equivalentes* são freqüentes no raciocínio matemático. Temos a resolver o problema *A* e não sabemos como, mas podemos achar que *A* é equivalente a um outro problema *B*. Ao examinarmos *B*, podemos encontrar um terceiro problema *C*, equivalente a *B*. Procedendo da mesma maneira, reduzimos *C* a *D*, e assim por diante, até chegarmos a um último problema *L*, cuja resolução é conhecida ou imediata. Como cada um desses problemas é equivalente ao que o precede; o último problema, *L*, deve ser igual ao problema original *A*. Ficamos, assim, capazes de deduzir a resolução do problema original *A* a partir

do problema L , ao qual chegamos como o último elo de uma cadeia de problemas auxiliares.

As cadeias de problemas deste tipo foram observadas pelos matemáticos gregos, como poderemos verificar numa importante passagem de PAPPUS. Para ilustração, reconsideremos o nosso exemplo 1. Chamemos de (A) a condicionante imposta à incógnita x :

$$(A) \quad x^4 - 13x^2 + 36 = 0.$$

A maneira de resolver o problema é transformar a condicionante proposta numa outra, que chamaremos de (B):

$$(B) \quad (2x^2)^2 - 2(2x^2) \cdot 13 + 144 = 0.$$

Observe-se que as condicionantes (A) e (B) são diferentes. A diferença é muito pequena, é verdade, as condicionantes são certamente equivalentes, como é fácil de ver, mas definitivamente elas não são idênticas. A passagem de (A) para (B) não só é correta como tem um objetivo bem nítido, óbvio para qualquer um que esteja familiarizado com a resolução de equações quadráticas. Prosseguindo no mesmo sentido, transformamos a condicionante (B) ainda numa outra (C):

$$(C) \quad (2x^2)^2 - 2(2x^2) \cdot 13 + 169 = 25.$$

Procedendo da mesma maneira, obtemos

$$(D) \quad (2x^2 - 13)^2 = 25.$$

$$(E) \quad 2x^2 - 13 = \pm 5$$

$$(F) \quad x^2 = \frac{13 \pm 5}{2}$$

$$(G) \quad x = \pm \sqrt{\frac{13 \pm 5}{2}}$$

$$(H) \quad x = 3, \text{ ou } -3, \text{ ou } 2, \text{ ou } -2.$$

Cada redução feita é conversível. Assim, a última condicionante (H) é equivalente à primeira condicionante (A), de tal modo que 3, -3, 2, -2 são todas possíveis soluções para a equação original.

Como se vê, deduzimos de uma condicionante original (A) uma sequência de condicionantes (B), (C), (D), cada uma das quais é equivalente àquela que a

precede. Este ponto merece o maior cuidado. As condicionantes equivalentes são satisfeitas pelos mesmos objetos. Portanto, se passarmos de uma condicionante proposta para uma nova condicionante equivalente, teremos as mesmas soluções. Mas se passarmos para uma condicionante mais restrita, perderemos soluções, e se passarmos para outra mais ampla, admitiremos soluções impróprias, adventícias, que nada têm a ver com o problema proposto. Se, numa série de reduções sucessivas, passarmos para uma condicionante mais restrita e, em seguida, para uma outra mais ampla, arriscaremos perder completamente o fio do problema original. Para evitar este risco, devemos verificar cuidadosamente cada nova condicionante introduzida: Será equivalente à solução original? Esta pergunta torna-se ainda mais importante quando não se trata de uma única equação, como aqui, mas de um sistema de equações, ou quando a condicionante não se expressa por equações como, por exemplo, nos problemas de traçado geométrico.

(Comparar com PAPPUS, especialmente os comentários 2, 3, 4 e 8. A descrição da página 104, linhas 35-46 é desnecessariamente restrita, pois se trata de uma cadeia de problemas de determinação, cada um dos quais tem uma incógnita diferente. O exemplo aqui considerado apresenta a particularidade oposta: todos os problemas da cadeia têm a mesma incógnita e diferem apenas na forma da condicionante. Naturalmente, é desnecessária uma tal restrição.)

8. *Redução unilateral.* Temos dois problemas A e B, ambos ainda não resolvidos. Se conseguirmos resolver A, poderemos daí deduzir a resolução completa de B, mas não ao contrário. Se pudéssemos resolver B obteríamos, possivelmente, alguma informação sobre A, mas não saberíamos como chegar à resolução completa de A a partir de B. Num caso tal, obtém-se mais da resolução de A do que da resolução de B. Chamemos A o *mais ambicioso* e B o *menos ambicioso* dos dois problemas.

Se, de um problema proposto, passarmos para um problema auxiliar mais ambicioso ou menos ambicioso, chamamos este passo de *redução unilateral*. Há dois tipos de redução unilateral e são ambos, de uma maneira ou de outra, mais arriscados do que uma redução bilateral ou conversível.

O nosso exemplo 2 mostra uma redução unilateral para um problema mais ambicioso. De fato, se pudermos resolver o problema original, relativo a um paralelepípedo cujo comprimento, largura e altura são, respectivamente, a , b e c , poderemos passar ao problema auxiliar fazendo $c = 0$ e assim obtendo um paralelogramo de comprimento a e largura b . Para um outro exemplo de redução unilateral a um problema menos ambicioso, ver PARTICULARIZAÇÃO, 3, 4 e 5. Estes exemplos mostram que, com alguma sorte, podemos usar um problema menos ambicioso como *intermediário*, combinando a solução do problema auxiliar com uma observação suplementar, para obter a solução do problema original.

A redução unilateral a um problema mais ambicioso pode também ter sucesso. (Ver GENERALIZAÇÃO, 2 e a redução do primeiro para o segundo exemplo tratada

em INDUÇÃO E INDUÇÃO MATEMÁTICA, 1 e 2.) De fato, o problema mais ambicioso pode ser mais acessível e nisto consiste o PARADOXO DA INVENÇÃO.

Problema rotineiro pode ser considerado o que consiste em resolver a equação $x^2 - 3x + 2 = 0$, caso a resolução da forma geral da equação quadrática haja sido previamente ensinada e exemplificada, de tal maneira que o aluno nada mais tenha a fazer do que substituir algumas letras, que aparecem na solução geral, pelos números -3 e 2 . Mesmo que a equação quadrática não tenha sido resolvida genericamente sob a forma "literal", mas se meia dúzia de equações desse tipo, com coeficientes numéricos, o tenham sido pouco antes, o problema poderá ser chamado "rotineiro". De modo geral, um problema será rotineiro se ele puder ser solucionado pela substituição de dados específicos no problema genérico resolvido antes, ou pelo seguimento, passo a passo, de algum exemplo muito batido. Ao apresentar um problema, o professor põe à frente do aluno uma resposta imediata e decisiva à indagação: *Conhece um problema correlato?* Desse modo, o aluno de nada mais precisa, além de um pouco de cuidado e de paciência para seguir uma fórmula preestabelecida, sem ter oportunidade de usar o seu discernimento nem as suas faculdades inventivas.

No ensino da Matemática, podem fazer-se necessários problemas rotineiros, até mesmo muitos deles, mas deixar que os alunos nada mais façam é indesculpável. O ensino que se reduz ao desempenho mecânico de operações matemáticas rotineiras fica bem abaixo do nível do livro de cozinha, pois as receitas culinárias sempre deixam alguma coisa à imaginação e ao discernimento do cozinheiro, mas as receitas matemáticas não deixam nada disso a ninguém.

Problemas de determinação, problemas de demonstração. Traçaremos um paralelo entre estes dois tipos de problemas.

1. O objetivo de um "problema de determinação" é encontrar um certo objeto, a incógnita do problema.

A incógnita é também chamada *quaesitum*, ou aquilo que se procura ou de que se necessita. Os "problemas de determinação" podem ser teóricos ou práticos, abstratos ou concretos, problemas sérios ou simples enigmas. Podemos procurar determinar incógnitas de todos os tipos; podemos tentar encontrar, calcular, obter, produzir, traçar, construir todos os tipos imagináveis de objetos. No problema da novela policial, a incógnita é um assassino. No problema de xadrez, a incógnita é a jogada do enxadrista. Em certos problemas de Álgebra elementar, a incógnita é um número. Num problema de traçado geométrico, a incógnita é uma figura.

2. O objetivo de um "problema de demonstração" é mostrar conclusivamente que certa afirmativa, claramente enunciada, é verdadeira ou, então, que é falsa. Temos de responder à pergunta: esta afirmativa é verdadeira ou falsa? E temos de respondê-la conclusivamente, quer provando-a verdadeira, quer provando-a falsa.

Uma testemunha afirma que o acusado passou em casa toda uma certa noite. O juiz tem de verificar se essa afirmativa é verdadeira ou não e, além disso, tem de apresentar razões tão boas quanto possíveis para a sua conclusão. Assim, o juiz tem um “problema de demonstração”. Outro problema deste tipo seria “demonstrar o teorema de Pitágoras”. Não diremos: “Demonstre ou refute o teorema de Pitágoras”. Em alguns aspectos, seria preferível incluir no enunciado do problema a possibilidade de refutar, mas poderemos desprezá-la, pois sabemos que as probabilidades de contradizer o teorema de Pitágoras são por demais remotas.

3. As partes principais de um “problema de determinação” são a *incógnita*, os *dados* e a *condicionante*.

Se tivermos de traçar um triângulo de lados a, b, c , a incógnita será um triângulo, os dados serão os três comprimentos a, b, c , e o triângulo terá de satisfazer a condicionante de que seus lados tenham os comprimentos a, b, c , a incógnita será um objeto da mesma categoria precedente, os dados serão os mesmos anteriores, porém a condicionante, que relaciona a incógnita com os dados, será diferente.

4. Se o “problema de demonstração” for um problema matemático comum, suas partes principais serão a *hipótese* e a *conclusão* do teorema que tiver de ser provado ou refutado.

“Se os quatro lados de um quadrilátero forem iguais, então as suas duas diagonais serão perpendiculares entre si.” A segunda parte, que começa por “então”, é a conclusão; a primeira parte, que começa por “se”, é a hipótese.

[Nem todos os teoremas podem ser divididos naturalmente em hipótese e conclusão. Assim, é praticamente impossível dividir dessa maneira o teorema: “Há uma infinidade de números inteiros”.]

5. Para resolver um “problema de determinação” é preciso conhecer, com grande exatidão, as suas partes principais, a incógnita, os dados e a condicionante. Nossa lista contém muitas indagações e sugestões relativas a essas partes.

Qual é a incógnita? Quais são os dados? Qual é a condicionante?

Separe as várias partes da condicionante.

Procure a relação entre os dados e a incógnita.

Considere a incógnita! E procure pensar num problema conhecido que tenha a mesma incógnita ou outra semelhante.

Mantenha apenas uma parte da condicionante, ponha a outra de lado; até que ponto a incógnita fica assim determinada? Como pode ela variar? É possível obter alguma coisa de útil a partir dos dados? Pode imaginar outros dados que sirvam para determinar a incógnita? Pode mudar a incógnita, ou os dados, ou ambas as coisas, de modo a que a nova incógnita e os novos dados fiquem mais próximos entre si?

Utilizou todos os dados? Utilizou toda a condicionante?

6. Para resolver um “problema de demonstração” é preciso conhecer, com grande exatidão, as suas partes principais, a hipótese e a conclusão. Há indagações e sugestões úteis relativas a essas partes e que correspondem àquelas indicações e sugestões da nossa lista que são especialmente aplicáveis aos “problemas de determinação”.

Qual é a hipótese? Qual é a conclusão?

Separe as várias partes da hipótese.

Procure a relação entre a hipótese e a conclusão.

Considere a conclusão. E procure pensar num teorema conhecido que tenha a mesma conclusão ou outra semelhante.

Mantenha apenas uma parte da hipótese, ponha a outra de lado; a conclusão ainda é válida? É possível obter alguma coisa de útil a partir da hipótese? Pode imaginar outra hipótese a partir da qual seja possível chegar-se facilmente à conclusão? Pode mudar a hipótese, ou a conclusão ou, se necessário, ambas, de modo a que a nova hipótese e a nova conclusão fiquem mais próximas uma da outra?

Utilizou toda a hipótese?

7. Os “problemas de determinação” são mais importantes na Matemática elementar; os “problemas de demonstração” o são na Matemática superior. Neste livro, os “problemas de determinação” têm mais destaque que os do outro tipo, mas o autor espera restabelecer o equilíbrio num trabalho mais amplo sobre este assunto.

Problemas práticos são diferentes, em diversos aspectos, dos problemas puramente matemáticos, muito embora os principais motivos e processos sejam essencialmente os mesmo em ambos os casos. Os problemas práticos da Engenharia geralmente envolvem problemas matemáticos. Diremos algumas palavras sobre as diferenças, analogias e correlações que existem entre estes dois tipos de problemas.

1. Um exemplo muito ilustrativo de problema prático é a construção de uma barragem sobre um rio. Não é necessário qualquer conhecimento especial para compreendê-lo. Em tempos quase pré-históricos, muito antes desta moderna era de teorias científicas, os homens construíram barragens no vale do Nilo e em outras partes do mundo, onde as lavouras dependiam de irrigação.

Procuremos visualizar o problema da construção de uma grande barragem moderna.

Qual é a incógnita? Muitas são as incógnitas de um problema desta natureza: a localização exata da barragem, suas dimensões e forma geométrica, os materiais a

3. Incógnitas, dados, condicionantes, conceitos, conhecimentos preliminares necessários, tudo é mais complexo e menos nítido nos problemas práticos do que nos puramente matemáticos. Esta é uma diferença importante, talvez a principal, e ela certamente implica em outras; no entanto, a motivação fundamental e os processos solucionadores parecem ser os mesmos para problemas de ambos os tipos.

Há uma impressão muito difundida de que os problemas práticos exigem maior experiência do que os problemas matemáticos. É possível, mas é muito provável que a diferença esteja na natureza do conhecimento necessário e não na nossa atitude para com o problema. Ao resolver um problema de uma ou de outra espécie, temos de depender da nossa experiência com problemas semelhantes e muitas vezes nos perguntamos: *Já viu o mesmo problema sob uma forma ligeiramente diferente? Conhece um problema correlato?*

Ao resolver um problema matemático, partimos de conceitos muito claros, que estão razoavelmente ordenados em nossa mente. Ao resolver um problema prático, muitas vezes somos obrigados a partir de idéias algo nebulosas; aí, então, a clarificação dos conceitos pode tornar-se uma parte importante. Assim, a ciência médica está hoje numa posição melhor para controlar doenças infecciosas do que estava antes de Pasteur, quando a própria noção de infecção era muito vaga. *Levou em conta todas as noções essenciais referentes ao problema?* Esta é uma boa pergunta para problemas de todos os tipos, porém a sua aplicação varia muito, conforme a natureza das noções intervenientes.

Num problema matemático perfeitamente formulado, todos os dados e todas as cláusulas da condicionante são essenciais e têm de ser levados em conta. Nos problemas práticos, temos uma grande multiplicidade de dados e de condicionantes; tomamos em consideração tantos quanto pudermos, mas somos forçados a desprezar alguns. Seja o caso do projetista de uma grande barragem. Ele leva em consideração o interesse público e importantes interesses econômicos, mas deverá pôr de lado pequenas pretensões e reclamações. Os dados de seu problema são, rigorosamente falando, inesgotáveis. Por exemplo, ele precisará saber um pouco mais acerca do terreno em que as fundações deverão ser assentadas, porém, num certo momento, ele deve parar de coletar dados geológicos, embora reste, inevitavelmente, uma margem de incerteza.

Utilizou todos os dados? Utilizou toda a condicionante? Não podemos esquecer tais indagações quando tratamos de problemas puramente matemáticos. Nos problemas práticos, devemos, porém, apresentá-las de outra forma: *Utilizou todos os dados que poderiam contribuir apreciavelmente para a solução? Utilizou todas as condicionantes que poderiam influenciar apreciavelmente a solução?* Avaliamos as informações relevantes disponíveis, coligimos mais informações, mas em dado momento devemos parar a coleta, precisamos parar em algum ponto, não podemos deixar de desprezar alguma coisa. "Quem quizer navegar sem risco, não se faça ao mar." Muitas vezes há um grande excesso de dados que não têm qualquer influência apreciável sobre a forma final da solução.

4. Os projetistas das barragens do Egito antigo tinham de confiar no bom senso para interpretar sua experiência, pois nada mais tinham em que se basear. O engenheiro não pode contar apenas com o bom senso, especialmente quando se trata de um projeto novo e audacioso; tem de calcular a resistência da barragem projetada, prever quantitativamente as tensões e as deformações que se desenvolverão no seu interior. Para isso, ele tem de utilizar a Teoria da Elasticidade (que se aplica razoavelmente bem às construções em concreto). Na aplicação da sua teoria, ele necessita de uma boa dose de Matemática; o problema prático de engenharia conduz a um problema matemático.

Este problema matemático é por demais técnico para ser aqui analisado. Tudo o que podemos dizer a respeito pode resumir-se a uma observação geral. Ao estabelecermos e ao resolvermos problemas matemáticos derivados de problemas práticos, geralmente contentamo-nos com uma *aproximação*. Temos de desprezar alguns dados e condicionantes de menor importância. Portanto, é razoável uma pequena imprecisão nos cálculos, particularmente quando pudermos ganhar em simplicidade o que perdermos em precisão.

5. Muita coisa de interesse geral poderia ser dita sobre aproximações. Não podemos, porém, presumir qualquer conhecimento matemático especializado, portanto, limitar-nos-emos a apenas um exemplo intuitivo e instrutivo.

O desenho de mapas geográficos constitui um importante problema prático. Ao concebermos um mapa, geralmente admitimos que a Terra seja uma esfera. Ora, isto é apenas uma suposição aproximada e não a verdade exata. A superfície da Terra não é, de modo algum, uma superfície matematicamente definida e sabemos com certeza que ela é achatada nos pólos. Se admitirmos, porém, que a Terra seja uma esfera, poderemos desenhar muito mais facilmente um mapa de grande parte sua superfície. Ganharemos muito em simplicidade e pouco perderemos em precisão. De fato, imaginemos uma grande bola cuja forma seja exatamente igual a da Terra e que tenha, no seu equador, um diâmetro de dez metros. A distância entre os pólos de uma tal bola será um pouco menor que dez metros, pois a Terra é achatada, porém a diferença será inferior a três centímetros. Desta maneira, a esfera constitui uma boa aproximação prática.

Progresso e consecução. Fez algum progresso? O que conseguiu de essencial? Podemos apresentar indagações deste tipo a nós próprios, quando estamos a resolver um problema, ou a um aluno cujo trabalho orientamos. Assim habituamo-nos a julgar, com maior ou menor confiança, o progresso e a consecução em casos concretos. Mas a passagem desses casos concretos para uma descrição genérica não é, de modo algum, fácil. No entanto, teremos de dar esse passo se desejarmos tornar o nosso estudo da Heurística um pouco mais completo. Além disso, precisamos tentar esclarecer o que constitui, de modo geral, o progresso e a consecução na resolução de problemas.

1. Para resolver um problema, precisamos saber alguma coisa do assunto em questão e, também, reunir e selecionar os itens relevantes do nosso conhecimento que se encontram em estado latente. A nossa concepção do problema é muito mais ampla no fim do que no princípio. O que lhe foi acrescentado? Aquilo que conseguimos extrair da nossa memória. Para chegarmos à solução, teremos de relembrar vários fatos essenciais. Teremos de nos recordar, se o nosso for um problema matemático, de problemas já resolvidos, de teoremas conhecidos, de definições. O ato de extrair da nossa memória esses elementos relevantes pode ser chamado de *mobilização*.

2. Para resolver um problema não basta, porém, relembrar fatos isolados. Precisamos combinar esses fatos isolados e a sua combinação deve ficar bem adaptada ao problema em questão. Assim, ao resolvermos um problema matemático, precisamos preparar um argumento que relacione os materiais lembrados, num conjunto bem adaptado. Esta atividade de adaptar e combinar pode ser chamada de *organização*.

3. De fato, mobilização e organização não podem jamais ser realmente separadas. Quando trabalhamos com concentração num problema, relembramos apenas aqueles fatos que estão mais ou menos relacionados com o nosso objetivo e nada temos a relacionar e organizar a não ser o material que relembramos e mobilizamos.

A mobilização e a organização constituem apenas dois aspectos de um mesmo processo complexo que apresenta ainda muitos outros.

4. Um outro aspecto do progresso do nosso trabalho é que *o modo de concepção se modifica*. Enriquecida com todo o material que rememoramos e adaptamos a ela, a nossa concepção do problema é muito mais opulenta no fim do que o era no princípio. O desejo de partir da nossa concepção inicial do problema para uma outra mais adequada, melhor adaptada, nos leva a tentar diversos pontos de vista e a encarar o problema sob ângulos diferentes. Dificilmente poderemos fazer qualquer progresso sem a VARIACÃO DO PROBLEMA.

5. À medida que progredimos no sentido da nossa meta final, passamos a conhecê-la melhor e, conhecendo-a melhor, julgamos que estamos a nos aproximar dela. À medida que avança o nosso exame do problema, *prevemos* com clareza cada vez maior o que deve ser feito para a sua resolução e como isso deve ser feito. Ao resolvermos um problema matemático, podemos prever, se tivermos sorte, que um certo teorema conhecido poderá ser utilizado, que um certo problema já anteriormente resolvido poderá ser útil, que a volta à definição de um certo termo técnico poderá ser necessária. Não prevemos essas coisas com certeza, apenas com um certo grau de plausibilidade. Teremos a certeza absoluta quando obtivermos a solução completa, mas antes de termos a certeza absoluta precisamos, muitas vezes, de nos contentar com uma suposição mais ou menos plausível. Sem considerações que sejam apenas plausíveis e provisórias jamais encontraremos a solução, que é certa e final. Temos necessidade do RACIOCÍNIO HEURÍSTICO.

6. O que se entende por progresso no sentido da solução? Avanço da mobilização e da organização dos nossos conhecimentos, evolução da nossa concepção do problema, previsão cada vez maior dos passos que constituirão o argumento final. Podemos avançar continuamente, por passos imperceptíveis, mas de quando em vez avançamos bruscamente, por saltos. Um súbito avanço no sentido da solução chama-se uma **IDÉIA BRILHANTE**, uma boa idéia, uma intuição (em alemão há um termo mais técnico, *Einfall*). O que é uma idéia brilhante? Uma repentina e memorável alteração da nossa perspectiva, uma súbita reorganização do nosso modo de conceber o problema, o advento de uma previsão confiante dos passos que teremos de dar para alcançar a solução.

7. As considerações acima emprestam às indagações e sugestões da nossa lista o suporte correto.

Muitas delas visam diretamente à mobilização dos nossos conhecimentos previamente adquiridos: *Já o viu antes? Ou já viu o mesmo problema sob uma forma ligeiramente diferente? Conhece um problema correlato? Conhece um teorema que possa ser útil? Considere a incógnita! E procure pensar num problema semelhante que tenha a mesma incógnita ou outra semelhante.*

Em situações típicas, julgamos já ter coletado o material necessário e procuramos dar melhor organização ao material mobilizado: *Eis um problema correlato que já foi antes resolvido. É possível utilizar o seu método? Deve-se introduzir algum elemento auxiliar para possibilitar a sua utilização?*

Em outras situações, também típicas, julgamos que não temos ainda coletado o material suficiente. Pensamos no que poderá faltar: *Utilizou todos os dados? Utilizou toda a condicionante? Levou em conta todas as noções essenciais, de interesse para o problema?*

Algumas perguntas visam diretamente à *variação do problema*: *É possível reformular o problema? É ainda possível reformulá-lo de outra maneira?* Muitas outras visam à variação do problema por meios específicos, tais como a volta às DEFINIÇÕES, utilizando ANALOGIA, GENERALIZAÇÃO, PARTICULARIZAÇÃO, DECOMPOSIÇÃO E RECOMBINAÇÃO.

Outras indagações sugerem ainda tentativas de *prever* a natureza da solução que procuramos alcançar: *É possível satisfazer a condicionante? A condicionante é suficiente para determinar a incógnita? Ou é insuficiente? Ou redundante? Ou contraditória?*

As indagações e sugestões da nossa lista não mencionam diretamente a *idéia brilhante* mas, de fato, todas se relacionam com ela. Para compreender o problema, preparamo-nos para tê-la, para conceber um plano, provocamo-la; uma vez provocada a idéia brilhante, levamo-la adiante; fazendo o retrospecto e examinando a solução,

procuramos aproveitá-la melhor.*

Qual é a incógnita? Do que se precisa? Que se quer? Que se deve procurar?

Quais são os dados? Que é fornecido? Do que se dispõe?

Qual é a condicionante? Por qual condição está a incógnita ligada aos dados?

Estas indagações podem ser apresentadas pelo professor para verificar se o problema foi compreendido com clareza. Além disso, elas encaminham a atenção do aluno para as partes principais de um "problema de determinação", a incógnita, os dados, a condicionante. Como é possível que seja necessário examinar diversas vezes essas partes, as perguntas deverão ser repetidas em fases mais avançadas da resolução. (Exemplos poderão ser encontrados nas seções 8, 10, 18, 20: em EQUACIONAMENTO 3, 4; em PROBLEMAS PRÁTICOS, 1; em ENIGMAS e em outros artigos).

Estas indagações são muito relevantes para o solucionador. Ele verifica o seu entendimento do problema, concentra a atenção nesta ou naquela parte principal. A resolução consiste, essencialmente, em ligar a incógnita aos dados. Portanto, o solucionador deverá concentrar repetidas vezes a atenção nestes elementos, perguntando: *Qual é a incógnita? Quais são os dados?*

O problema pode ter várias incógnitas, ou a condicionante pode ter diversas partes que devam ser consideradas separadamente, ou pode ser conveniente considerar algum dado isolado. Por isso, podemos usar diversas variantes das nossas indagações, tais como: *Quais são as incógnitas? Qual é o primeiro dado? Qual é o segundo dado? Quais são as diversas partes da condicionante? Qual é a primeira cláusula da condicionante?*

As partes principais de um "problema de demonstração" são a hipótese e a conclusão e as indagações correspondentes serão: *Qual é a hipótese? Qual é a conclusão?* É possível que precisemos variar a expressão verbal ou modificar estas perguntas tantas vezes úteis; *O que se supõe? Quais são as várias partes da suposição?* (Ver exemplos na seção 19).

Raciocínio heurístico é aquele que não se considera final e rigoroso, mas apenas provisório e plausível, e que tem por objetivo descobrir a solução do problema que se apresenta. Somos muitas vezes levados a usar o raciocínio heurístico. Teremos a absoluta certeza quando chegarmos à solução completa, mas freqüentemente, antes de chegarmos à certeza absoluta, teremos de nos satisfazer com um estimativa mais ou menos plausível. É possível que precisemos do provisório antes de atingirmos o final. Para chegarmos a uma demonstração rigorosa, é necessário o raciocínio heurístico, assim como andaimes são necessários à construção de um edifício.

*Diversos dos pontos discutidos neste artigo são tratados com maior extensão no trabalho do Autor, publicado na *Acte Psychologica*, vol.4 (1938), págs. 113 — 170.

Ver SINAIS DE PROGRESSO. Muitas vezes, o raciocínio heurístico é baseado na indução ou na analogia; ver INDUÇÃO E INDUÇÃO MATEMÁTICA e ANALOGIA, 8, 9, 10.

O raciocínio heurístico vale por si próprio. O que é mau é confundi-lo com a demonstração rigorosa. Pior ainda é fazer passar um raciocínio heurístico por uma demonstração rigorosa.

O ensino de certas matérias, principalmente do Cálculo para engenheiros e físicos, seria muito melhorado se a natureza do raciocínio heurístico fosse mais bem compreendida, se tanto as suas vantagens quanto as suas limitações fossem abertamente reconhecidas e se os livros mostrassem claramente os argumentos heurísticos. Um argumento heurístico apresentado com elegância e franqueza poderá ser útil; é possível que ele prepare para o argumento rigoroso, do qual geralmente contém alguns germes. Mas é provável que um argumento heurístico se torne prejudicial se ele for apresentado com ambigüidade, revelando hesitação entre acanhamento e pretensão. Ver POR QUE DEMONSTRAR?

Redundância. Ver CONDICIONANTE.

Regras de descoberta. A primeira regra de descoberta é ter boa cabeça e boa sorte. A segunda é ficar firme e esperar até que apareça uma idéia brilhante.

Pode ser bom lembrar, de um modo algo brusco, que certas aspirações são irrealizáveis. Regras de descoberta infalíveis, que levem à resolução de todos os problemas matemáticos, seriam mais preciosos do que a pedra filosofal, em vão procurada pelos alquimistas. Tais regras fariam milagres, mas não há milagres. Encontrar regras infalíveis, aplicáveis a toda sorte de problemas é um velho sonho filosófico, que nunca passará de sonho.

Uma espécie razoável de heurística não poderá almejar regras infalíveis, mas sim tentar o estudo de processos mentais (operações, passos, lances) específicos, que contribuam para a solução de problemas. Tais procedimentos são usados por todas as pessoas sãs, interessadas no problema. Elas são indicadas por certas indagações e sugestões estereotipadas que as pessoas inteligentes apresentam a si próprias e o professor inteligente apresenta a seus alunos. Uma lista de indagações e sugestões desta categoria, formuladas como suficiente clareza e bem ordenadas, pode não ser tão desejável quanto a pedra filosofal, mas pode ser apresentada. Este livro apresenta tal lista.

Regras de ensino. A primeira regra de ensino é saber o que se deve ensinar. A segunda, é saber um pouco mais do que aquilo que se deve ensinar.

Cada coisa em seu lugar. O Autor não pensa que todas as regras de conduta para professores sejam completamente inúteis, pois do contrário não ousaria escre-

ver um livro inteiro sobre a conduta de professores e alunos. No entanto, é bom não esquecer que um professor de Matemática deverá saber algo de Matemática e que aquele que desejar incutir em seus alunos a correta atitude mental para com os problemas deverá ter, ele próprio, adquirido essa atitude.

Regra de estilo. A primeira regra de estilo é ter alguma coisa a dizer. A segunda é controlar-se quando, por acaso, tiver duas coisas a dizer: dizer primeiro uma coisa, depois outra, nunca ambas ao mesmo tempo.

Regressão. Se quisermos compreender o comportamento humano, deveremos compará-lo com o comportamento animal. Os animais também “têm problemas”. A Psicologia Experimental tem feito grandes progressos, nas últimas décadas, em pesquisas sobre as atividades “solucionadoras de problemas” de animais de diversas espécies. Não podemos aqui discutir essas investigações, mas procuraremos descrever resumidamente apenas uma experiência simples e instrutiva, descrição essa que servirá como que um comentário do método da análise, ou da *regressão*, isto é, de “voltar para trás”. A propósito, este assunto é tratado no presente livro, sob o nome de PAPPUS, a quem se deve uma clássica descrição do método em questão.

1. Procuraremos responder à seguinte intrincada pergunta: *Como é possível retirar de um rio exatamente seis litros de água se só se dispõe, para medir a água, de dois recipientes, com quatro e nove litros de capacidade?*

Imaginemos com clareza os instrumentos de que dispomos, os dois recipientes. (*Quais são os dados?*) Admitamos que são eles dois vasos cilíndricos, de bases iguais e cujas alturas estão entre si como 9 está para 4 (ver figura 22). Se, na face de cada vaso, houvesse uma escala graduada que nos permitisse avaliar o nível da água, o problema seria simples. No entanto, não há tal escala e, assim, estamos ainda longe da solução.



Figura 22

Não sabemos ainda como medir exatamente 6 litros, mas poderemos medir alguma outra coisa? (*Se não conseguir resolver o problema proposto, procure antes*

resolver algum problema correlato. É possível obter algo de útil dos dados?) Façamos alguma coisa, vamos nos divertir um pouco. Poderíamos encher completamente o vaso maior e despejar tanto quanto possível no vaso menor; ficaríamos assim com 5 litros. Seria também possível ficar com 6 litros? Temos de novo os dois vasos vazios. Poderíamos também...

Estamos agora a fazer o que muita gente faz quando se defronta com este problema. Começamos com os dois recipientes vazios, experimentamos isto e aquilo, enchemos e esvaziamos, e quando não conseguimos, recomeçamos por tentar alguma outra coisa. Estamos assim a *caminhar para frente*, da situação inicial para a situação final desejada, dos dados para a incógnita. Poderemos, acidentalmente, ter bom êxito.

2. Ora, as pessoas excepcionalmente capazes, ou aquelas que nas suas aulas de Matemática tiveram a oportunidade de aprender algo mais do que operações meramente rotineiras, não perdem muito tempo com essas tentativas, mas voltam-se e passam a caminhar para trás.

De que é que precisamos? (*Qual é a incógnita?*) Visualizemos a situação final que almejamos, com a maior clareza possível. Imaginemos que temos aqui, à nossa frente, o vaso maior contendo exatamente seis litros de água e o vaso menor vazio, como a figura 23 mostra. (*Começemos por aquilo de que se precisa e admitamos que já foi encontrado aquilo que se procura*, diz Pappus.)

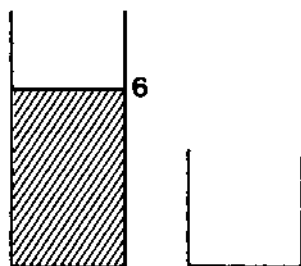


Figura 23

De que situação anterior poderíamos obter a desejada situação final mostrada na figura 23? (*Indaguemos de que antecedente poderá ser deduzido o resultado desejado*, diz Pappus). Poderíamos, é evidente, encher totalmente o vaso maior, ou seja, com 9 litros, mas então teríamos de despejar exatamente 3 litros. Para conseguir isto... teríamos de ter exatamente um litro de água no vaso menor! É isso! (Ver figura 24).

(O passo que acabamos de dar não é assim tão fácil. Poucos serão capazes de dá-lo sem muita hesitação. Com efeito, ao reconhecermos a significação deste passo, já prevemos a forma da resolução que segue.)

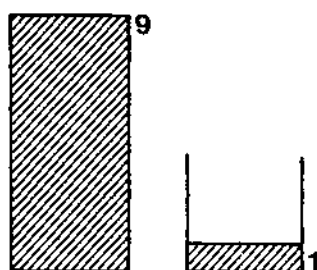


Figura 24

Mas como poderemos chegar à situação que acabamos de encontrar e que é ilustrada pela figura 24? (*Indaguemos de novo qual seria o antecedente deste antecedente*). Como a quantidade de água do rio é praticamente ilimitada, a situação da figura 24 equivale à seguinte, da figura 25.

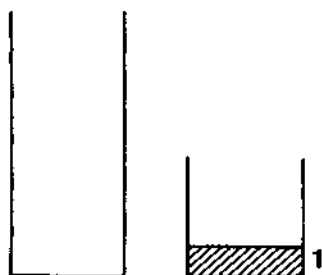


Figura 25

ou, ainda, à seguinte, da figura 26.

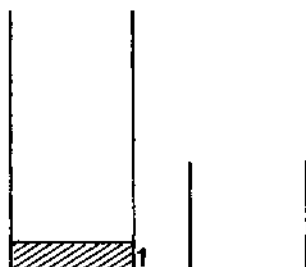


Figura 26

É fácil reconhecer que, se for possível chegar às situações indicadas nas figuras 24, 25 e 26, pode-se igualmente chegar a qualquer uma outra, mas não é fácil obter a situação da figura 26, a menos que *já a tenhamos visto antes*, ou a encontrado acidentalmente em alguns dos nossos ensaios iniciais. Nas tentativas com os dois vasos, é possível que tenhamos feito alguma coisa semelhante e que agora relembremos, no momento certo, de que a situação da figura 26 pode surgir por sugestão da figura 27. Enchemos totalmente o vaso maior, em seguida dele transferimos, duas vezes seguidas, quatro litros para o vaso menor, despejando-os no rio, de cada vez. *Chegamos finalmente a alguma coisa já conhecida* (estas são palavras de Pappus) e, seguindo o método da análise ou *regressão*, descobrimos a sequência apropriada das operações.

É verdade, descobrimos esta sequência na ordem regressiva, mas tudo o que resta a fazer é *inverter o processo e começar pelo último ponto alcançado na análise* (como diz Pappus). Primeiramente, realizamos as operações sugeridas pela figura 27 e obtemos a figura 26, daí passamos a 25, em seguida à 24 e, por fim, à figura 23. *Retrocedendo, conseguimos finalmente deduzir o que era preciso.*

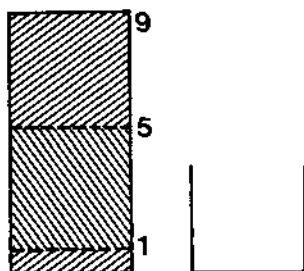


Figura 27

3. A tradição grega atribui a Platão a descoberta do método da análise. Pode-se não confiar muito na tradição mas, de qualquer maneira, se não foi Platão, algum sábio grego achou por bem atribuir a invenção deste método a um gênio filosófico.

Há certamente neste método alguma coisa que não é superficial. Há uma certa dificuldade psicológica em fazer meia-volta, em afastar-se do objetivo, em regredir, em desviar-se da trajetória almejada. Ao descobrir a sequência apropriada das operações, a nossa mente passa a proceder numa ordem que é exatamente a inversa do desempenho real. Há uma espécie de repugnância psicológica para com esta ordem inversa, que pode impedir que até um estudante muito capaz compreenda o método, se este não lhe for apresentado com cuidado.

No entanto, não é preciso ser gênio para resolver por regressão um problema concreto. Qualquer pessoa poderá fazê-lo com um pouco de bom senso. Concentramo-nos no objetivo desejado, visualizamos a posição final em que gostaríamos de nos encontrar. A partir de que posição anterior podemos chegar à final? É natural

fazer esta pergunta e, ao fazê-la, estamos voltando para trás. Até problemas muito elementares conduzem naturalmente à regressão (ver PAPPUS, 4).

A regressão é um processo de bom senso ao alcance de todos e não se pode duvidar que ele foi utilizado, por matemáticos ou não, antes de Platão. O que alguns sábios gregos podem ter considerado como uma realização digna do gênio de Platão é o enunciado do processo em termos genéricos e a sua caracterização como uma operação típica útil na resolução de problemas, matemáticos ou não.

4. Passemos agora a uma experiência psicológica — caso não seja muito brusca a transição de Platão para cães, galinhas e chimpanzés. Uma cerca forma três dos lados de um retângulo, deixando aberto o quarto lado, como a figura 28 mostra.

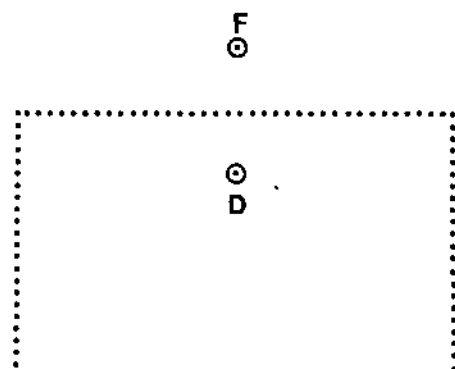


Figura 28

Colocamos um cachorro dum lado da cerca, no ponto *D*, e alguma comida do outro lado, no ponto *F*. Para o cachorro, este problema é relativamente simples. Ele primeiro ensaia um salto direto sobre a comida, mas em seguida se volta e, correndo com decisão até o final da cerca, chega à comida numa curva suave. Algumas vezes, porém, especialmente quando os pontos *D* e *F* estão muito próximos, a solução não é tão imediata: o cachorro pode perder tempo a ladrar, a arranhar a cerca e a jogar-se contra ela, antes de “conceber a brilhante idéia” (como diríamos) de contorná-la.

É interessante comparar o comportamento de outros animais quando colocados no lugar do cachorro. O problema é muito fácil para um chimpanzé ou para uma criança de quatro anos (para esta, um brinquedo pode constituir um atrativo maior do que a comida). Ele se torna, porém, surpreendentemente difícil para uma galinha, que fica a correr excitadamente para frente e para trás, do seu lado da cerca, e pode assim levar um tempo enorme até chegar à comida, se é que chegará mesmo. Mas a galinha poderá enfim conseguir acidentalmente.

5. Não devemos estabelecer uma grande teoria com base em uma só experiência que foi apenas abreviadamente divulgada. Não há porém, nenhum inconveniente

em observar analogias evidentes, desde que estejamos preparados para verificá-las e reavaliá-las.

Resolver um problema de qualquer tipo é contornar um obstáculo; portanto, a experiência descrita tem um valor simbólico. A galinha comportou-se como as pessoas que resolvem os seus problemas de qualquer jeito, por tentativas repetidas, conseguindo eventualmente, graças a um acidente feliz, sem que tenham percebido as razões do seu sucesso. O cachorro, que arranhou, saltou e latiu antes de se voltar, resolveu o seu problema quase tão bem quanto nós resolvemos o nosso dos dois recipientes. Imaginar uma escala graduada para indicar o nível da água era uma espécie de arranhão quase inútil, que apenas mostrava que aquilo que procurávamos estava bem abaixo da superfície. Nós também procuramos primeiro caminhar para a frente e mais tarde tivemos a idéia de voltar para trás. O cachorro que, depois de um breve exame da situação, deu meia-volta e saiu a correr, dá a impressão, certa ou errada, de uma intuição superior.

Não devemos sequer condenar a galinha pela sua inépcia. Há uma certa dificuldade em fazer meia-volta, em afastar-se do objetivo, em caminhar sem olhar continuamente para a meta, em não seguir a trajetória que leva diretamente ao fim desejado. Há uma evidente analogia entre as dificuldades da galinha e as nossas próprias.

Sabedoria dos provérbios. Resolver problemas é uma atividade humana fundamental. De fato, a maior parte do nosso pensamento consciente relaciona-se com problemas. A não ser quando nos entregamos a meros devaneios ou fantasias, os nossos pensamentos dirigem-se para um fim, procuramos meios, procuramos resolver um problema.

Algumas pessoas têm mais sucesso do que outras em atingir os seus objetivos e resolver os seus problemas. Essas diferenças são notadas e comentadas e certos provérbios parecem ter preservado a quintessência de tais observações. De qualquer modo, há muitos provérbios que caracterizam admiravelmente os procedimentos típicos seguidos na resolução de problemas, os aspectos de bom senso, os estratagemas e os erros habituais. Muitas observações judiciosas, algumas sutis, aparecem em provérbios mas, é evidente, estes não constituem um sistema científico, livre de incoerências e obscuridades. Pelo contrário, é muito comum a um determinado provérbio ser contraposto um outro que dá um conselho exatamente inverso e é grande a amplitude de interpretação. Seria tolice considerar os provérbios como fontes autorizadas de sabedoria universalmente aplicável, mas seria também uma pena desprezar a descrição pitoresca de procedimentos heurísticos que eles proporcionam.

A coleta e a classificação de provérbios relativos ao planejamento, à procura de meios e à escolha de linhas de ação, em suma, de provérbios relativos à resolução de problemas, constituirá interessante tarefa. Como, para isso, dispomos de pouco espaço, o melhor que podemos fazer é citar alguns que ilustram as fases principais do processo solucionador, as quais se destacam em nossa lista e são discutidas nas seções 6 a 14 e em outros lugares. Os provérbios citados estão impressos em *itálico*.

1. A primeira coisa a fazer com um problema é compreendê-lo bem: *Quem entende mal, mal responde*. Precisamos distinguir claramente a meta que desejamos alcançar: *Pense no fim antes de começar*. Este é um conselho muito antigo: *respice finem* é o dito latino. Infelizmente, nem todos seguem este bom conselho e as pessoas muitas vezes começam a especular, a falar e, até, a agir confusamente sem ter compreendido propriamente o objetivo para o qual deveriam trabalhar. *O tolo olha para o começo, o sábio vê o fim*. Se o objetivo não estiver claro em nossa mente, poderemos facilmente desviarmo-nos do problema e abandoná-lo. *O sábio começa pelo fim, o tolo termina no começo*.

Não basta, porém, compreender o problema, é preciso também querer a sua solução. Não teremos probabilidades de resolver um problema difícil se não tivermos um forte desejo de resolvê-lo, mas havendo um tal anseio haverá uma chance. *Querer é poder*.

2. A concepção de um plano, de uma idéia da ação apropriada, é o que mais importa na solução de um problema.

Uma boa idéia é uma sorte, uma inspiração, um presente dos deuses, que precisamos fazer por merecer: *A perseverança é a mãe da boa sorte. Não se derruba um carvalho com uma só machadada. Se no princípio não conseguir, continue tentando*. Mas não basta continuar tentando, precisamos tentar meios diferentes, variar as tentativas: *Experimente todas as chaves do molho*. Devemos adaptar as nossas tentativas às circunstâncias. *Veleja-se conforme o vento. Façamos como pudermos se não pudermos fazer como queremos*. Se não conseguirmos, deveremos tentar outra coisa. *O sábio muda de opinião, o tolo nunca*. Devemos mesmo estar, de saída, preparados para um possível fracasso de nosso plano e ter outro de reserva. *Mantenha duas cordas para o arco*. É possível, naturalmente, exagerar essa mudança de um plano para outro e, assim, perder tempo. Poderemos, então, ouvir o comentário irônico: *Faça e desfaça que o dia é bastante longo*. Teremos menos possibilidades de enganos se não perdermos de vista a nossa meta. *O objetivo da pescaria não é lançar o anzol, mas sim apanhar o peixe*.

Esforçamo-nos para extrair algo de útil da memória, porém, muitas vezes, quando surge uma idéia que poderia ajudar, não a apreciamos por causa da sua aparente insignificância. O experto talvez não tenha mais idéias que o inexperto, porém ele aprecia mais as que tiver e as utiliza melhor. *O sábio cria mais oportunidades do que as encontra. O sábio faz ferramentas daquilo que lhe cai às mãos*. Ou é possível que a vantagem do experto esteja em que ele se mantém permanentemente atento à oportunidades. *Fique sempre de olho na grande ocasião*.

3. Devemos começar a execução do nosso plano na hora certa, quando ele estiver amadurecido, nunca antes. Não devemos nos precipitar. *Olhe antes de saltar. Prove antes de confiar. Uma demora prudente torna o caminho seguro*. Por outro lado, não devemos hesitar por muito tempo. *Quem quiser navegar sem risco, não se faça ao mar. Faça o que puder e espere pelo melhor. Use os meios e Deus o ajudará*.

Devemos usar o nosso discernimento para escolher o momento azado. E aqui vai um aviso oportuno para lembrar o engano mais comum, a mais habitual falha de discernimento: *É fácil acreditar naquilo que se deseja.*

O nosso plano, no caso mais favorável, somente nos fornecerá um contorno geral. Temos de nos convencer de que os detalhes se encaixam nesse contorno, de modo que temos de examinar cada detalhe, um após outro. *Degrau a degrau, sobe-se a escada. Faça as coisas gradualmente.*

Na execução do nosso plano, devemos ter o cuidado de dispor as suas etapas na ordem apropriada, que muitas vezes é inversa à ordem da invenção. *O que o tolo faz no fim, o sábio faz no princípio.*

4. O reexame da solução completa constitui uma fase importante e instrutiva. *Não pensa bem quem não repensa.*

Reexaminando a solução, podemos descobrir outra confirmação do resultado. É bom lembrar ao principiante que essa segunda confirmação é valiosa, que é melhor ter duas demonstrações do que uma só. *É mais seguro ancorar com dois ferros.*

5. De modo algum esgotamos os comentários acerca de provérbios relativos à solução de problemas. No entanto, muitos outros, que poderiam ter sido citados, dificilmente apresentariam novos temas, mas apenas variações sobre os já mencionados. Certos aspectos mais sistemáticos e mais refinados do processo solucionador mal caberiam sob o título de Sabedoria dos Provérbios.

Na descrição dos aspectos mais sistemáticos da solução, o Autor procurou, aqui e ali, imitar o feito peculiar dos provérbios, o que não é fácil. Seguem-se alguns provérbios “sintéticos” que descrevem atitudes algo mais refinadas.

O fim indica os meios.

Seus melhores amigos são O que, Por quê, Onde, Quando e Como. Pergunte O que, pergunte Por quê, pergunte Onde, Quando e Como — e não pergunte a ninguém quando precisar de conselho.

Não acredite em coisa alguma, mas só duvide daquilo que merecer dúvida.

Olhe em torno quando encontrar o primeiro cogumelo — ou fizer a primeira descoberta; ambos medram em grupos.

Se não conseguir resolver o problema proposto não se aflija muito com o insucesso e procure consolar-se com alguns dos êxitos que já obteve, *procure antes resolver algum problema correlato*; criará, assim, coragem para obter de novo o problema original. Não esqueça que a superioridade do homem está em contornar um obstáculo que não pode ser superado frontalmente, em conceber um problema auxiliar adequado quando o problema original parecer insolúvel.

É possível imaginar um problema correlato que seja mais acessível? É preciso

agora *inventar* um problema correlato, e não apenas *lembrar* de um; espero que já haja tentado satisfazer à indagação: *Conhece um problema correlato?*

As demais indagações têm um objetivo comum, que é a VARIAÇÃO DO PROBLEMA. Há diferentes meios de alcançar este objetivo, tais como GENERALIZAÇÃO, PARTICULARIZAÇÃO, ANALOGIA e outros, que são maneiras diversas de DECOMPOSIÇÃO E RECOMBINAÇÃO.

Separe as diversas partes da condicionante. Nosso primeiro dever é compreender o problema. Compreendendo-o por inteiro, passamos aos detalhes. Examinamos suas partes principais (a incógnita, os dados, a condicionante) uma por uma. Quando tivermos bem em mente essas partes e nenhuma idéia nos houver ainda ocorrido, passamos a outros detalhes. Examinamos os diversos dados, um por um. Uma vez compreendida a condicionante inteira, *separamos as suas diversas partes* e examinamos cada parte, uma a uma.

Vemos agora a função da sugestão aqui apresentada. Ela tende a provocar um passo que temos de dar quando procuramos ver claramente o problema e tivermos de entrar em detalhes cada vez mais profundos. Trata-se aí de um passo de DECOMPOSIÇÃO E RECOMBINAÇÃO.

Separe as diversas partes da condicionante. Pode anotá-las? Temos muitas vezes oportunidade de formular esta indagação quando passamos ao EQUACIONAMENTO.

Simetria tem dois significados: um, mais comum, particular, geométrico; outro, menos comum, genérico, lógico.

A Geometria Espacial elementar considera dois tipos de simetria: em relação a um plano (chamado plano de simetria) e em relação a um ponto (chamado centro de simetria). O corpo humano parecer ser razoavelmente simétrico, porém de fato não o é: diversos órgãos internos estão dispostos muito assimetricamente. Uma estátua pode ser perfeitamente simétrica em relação a um plano vertical, de tal maneira que as duas partes sejam completamente "intercambiáveis".

Numa acepção mais geral, um todo é dito simétrico quando tem partes intercambiáveis. Há muitos graus de simetria; eles diferem no número de partes intercambiáveis e nas operações que permutam as partes. Assim, um cubo apresenta um alto grau de simetria: as suas 6 faces são intercambiáveis entre si, como o são os seus 8 vértices e as suas 12 arestas. A expressão

$$yz + zx + xy$$

é simétrica: qualquer par das letras x, y, z pode ser permutado entre si sem alterar a expressão.

A simetria, no sentido geral, é importante para o nosso assunto. Se o problema for simétrico em algum aspecto, poderemos tirar vantagem da observação das suas partes intercambiáveis e muitas vezes compensa tratar da mesma maneira as partes que desempenham a mesma função (ver ELEMENTOS AUXILIARES, 3).

Procure tratar simetricamente o que é simétrico e não destruir arbitrariamente qualquer simetria natural. Somos, contudo, muitas vezes levados a tratar assimetricamente o que é naturalmente simétrico. Um par de luvas é certamente simétrico; no entanto, ninguém usa o par de um modo perfeitamente simétrico, ninguém coloca ambas as luvas ao mesmo tempo, mas sim uma após outra.

A simetria pode também ser útil na verificação dos resultados (ver seção 14).

Sinais de progresso. Quando Colombo e seus companheiros velejavam para oeste, através de um oceano desconhecido, eles se animavam sempre que avistavam pássaros, pois consideravam estes como um sinal favorável, indicador da proximidade de terra, porém ficaram muitas vezes desiludidos. Pensavam que algas marinhas flutuantes ou nuvens baixas podiam indicar terra, mas também ficaram desapontados. Um dia, porém, os sinais se multiplicaram. Na quinta-feira, 11 de outubro de 1492, "avistaram pássaros e um caniço verde perto do navio. Os que estavam na caravela *Pinta* viram um pedaço de cana e uma vara e recolheram uma pequena lança que parecia ter sido trabalhada a ferro, além de outro pedaço de cana, de uma planta terrestre e de uma pequena tábu. A tripulação da caravela *Niña* também avistou sinais de terra e um galho coberto de sementes. Foi um alívio geral e todos se rejubilaram com estes sinais". E de fato, no dia seguinte avistaram terra, a primeira ilha de um Novo Mundo.

O nosso empreendimento pode ser importante ou não, o nosso problema pode ser de qualquer tipo — quando estamos a trabalhar intensamente, procuramos, com ansiedade, sinais de progresso, assim como Colombo e seus companheiros procuravam sinais de proximidade de terra. Examinaremos alguns exemplos que nos ajudarão a compreender o que razoavelmente pode ser considerado como um sinal de aproximação da solução.

1. *Exemplos* Tenho um problema de xadrez. Tenho de por em xeque-mate o rei preto, digamos, em dois lances. No tabuleiro, bem distante do rei preto, está um cavalo branco que parece supérfluo. Para que serve? Sou forçado, no momento, a deixar sem resposta esta pergunta. No entanto, após várias tentativas, ocorreu-me uma nova jogada e observei que esta poria em jogo o cavalo branco. A observação deu-me uma nova esperança e considere-i-a como um sinal favorável: o novo lance tinha uma certa possibilidade de ser o certo. Por quê?

Num problema de xadrez bem concebido não há peças supérfluas. Portanto, temos de levar em conta todas as que estão no tabuleiro, temos de *usar todos os dados*. A solução correta tem certamente de usar todas as peças, mesmo aquele cavalo

branco que parecia supérfluo. Neste último caso, o novo lance que imaginei concordava com a jogada correta que devia fazer. O novo lance parece o certo; ele pode ser o certo.

Seria interessante examinar uma situação semelhante num problema matemático. Quero exprimir a área de um triângulo em função dos três lados a , b e c . Já tracei um plano. Sei, mais ou menos claramente, quais as relações geométricas que tenho de levar em conta e que cálculos devo realizar. Mas não tenho ainda certeza se o meu plano funcionará. Se agora, procedendo de acordo com o plano, observar que a grandeza

$$\sqrt{b + c - a}$$

entra na expressão da área que estou em vias de estabelecer, terei um bom motivo para ficar satisfeito. Por quê?

De fato, não se deve esquecer que a soma de dois lados de um triângulo é maior do que o terceiro. Isto implica numa certa restrição. Os lados dados, a , b e c , não podem ser inteiramente arbitrários; por exemplo, $b + c$ tem de ser maior do que a . Trata-se de uma parte essencial da condicionante e devemos *utilizar toda a condicionante*. Se $b + c$ não for maior do que a , a fórmula que procuro tornar-se-á ilusória. Sim, porque a raiz quadrada que acima aparece torna-se imaginária quando $b + c - a$ é negativo, isto é, quando $b + c$ é menor do que a e assim a raiz quadrada torna-se imprópria para representar uma quantidade real. Deste modo, a minha fórmula, na qual entra uma raiz quadrada, apresenta uma importante propriedade em comum com a fórmula verdadeira. A minha fórmula parece a verdadeira; ela pode ser a fórmula verdadeira.

Eis um outro exemplo. Há algum tempo, quis demonstrar um teorema de Geometria Espacial. Sem muita dificuldade, encontrei uma primeira observação que me pareceu pertinente, mais aí parei. Faltava alguma coisa para concluir a demonstração. Quando, naquele dia, desisti, tinha já uma noção, mais clara do que no princípio, de como se apresentaria a solução, de como a lacuna deveria ser preenchida, porém era incapaz de preenchê-la. No dia seguinte, após uma noite bem dormida, logo lembrei-me de um teorema análogo da Geometria Plana. Num lampejo, convenci-me de que estava agora com a solução e tinha, pensei, boa razão para estar disto convencido. Por quê?

De fato, a *analogia* é um bom guia. A resolução de um problema de Geometria Espacial muitas vezes depende de um problema análogo da Geometria Plana (ver ANALOGIA, 3 a 7). Assim, no meu caso, havia de saída uma possibilidade de que a desejada demonstração utilizaria como lema um teorema da Geometria Plana do tipo que finalmente me veio à mente. "Este teorema parece o lema de que preciso; ele pode ser o lema de que preciso" — este foi o meu raciocínio.

Se Colombo e seus homens se dessem ao trabalho de raciocinar explicitamente, teriam procedido de maneira semelhante. Conheciam a aparência do mar nas proximidades da costa. Sabiam que, com maior frequência que em alto-mar, aparecem pássaros nos ares, vindos de terra, e objetos flutuantes, desgarrados do litoral. Muitos dos homens deviam ter feito observações semelhantes quando, em viagens anteriores, regressavam aos seus portos de origem. Na véspera da data memorável em que avistaram a ilha de São Salvador, quando os objetos que flutuavam nas águas tornaram-se mais freqüentes, pensaram: "Parece que estamos nos aproximando de terra; é possível que estejamos nos aproximando de terra" e "foi um alívio geral e todos se rejubilaram com estes sinais".

2. *Caráter heurístico dos sinais de progresso.* Insistamos num ponto que talvez esteja claro para todos, mas que é muito importante e, por isto, deve ficar perfeitamente esclarecido.

O tipo de raciocínio ilustrado pelos exemplos anteriores merece ser seriamente notado e levado em conta, embora apenas proporcione uma indicação plausível e não uma certeza infalível. Reformulemos um desses raciocínios com pedantismo, por extenso e com detalhes de pouca naturalidade:

Quando nos aproximamos de terra, muitas vezes avistamos pássaros.

Estamos a avistar pássaros.

Portanto, provavelmente, estamos a nos aproximar de terra.

Sem a palavra "provavelmente", a conclusão seria uma completa falácia. Com efeito, Colombo e seus companheiros muitas vezes avistaram pássaros, mas depois se desapontaram. Só uma vez chegou o dia em que os avistaram e ao qual se seguiu o dia da descoberta.

Com a palavra "provavelmente", a conclusão é razoável e natural, mas de maneira alguma constitui uma demonstração conclusiva: ela é somente uma indicação, uma sugestão heurística. Seria um grande engano esquecer que uma tal conclusão é apenas provável e considerá-la como uma certeza. Porém desprezar inteiramente essas conclusões seria um engano ainda maior. Quem tomar uma conclusão heurística como certa, poderá ser enganado e ficar desapontado; mas quem desprezar completamente as conclusões heurísticas não fará nenhum progresso. Os mais importantes sinais de progresso são heurísticos. Devemos confiar nesles? Devemos segui-los? Siga-os, mas fique de olho aberto. Confie neles, mas não deixe de observar. E nunca renuncie ao seu discernimento.

3. *Sinais claramente expressáveis.* Podemos encarar os exemplos anteriores de um outro ponto de vista.

Em um desses exemplos, consideramos como um sinal favorável, o fato de conseguirmos pôr em jogo um dado até então não utilizado (o cavalo branco). Estávamos perfeitamente certos em assim considerá-lo. De fato, resolver um problema consiste,

essencialmente, em *encontrar a conexão entre os dados e a incógnita*. Além disso, devemos, pelo menos nos problemas bem enunciados, *utilizar todos os dados* e relacionar cada um deles com a incógnita. Assim, podemos considerar que a colocação em jogo de mais um dado é um progresso, um passo à frente.

Num outro exemplo, consideramos como um sinal favorável o fato de uma cláusula essencial da condicionante ter sido adequadamente levada em conta em nossa fórmula. Estávamos perfeitamente certos em assim considerar. Com efeito devemos *utilizar toda a condicionante*. Assim sendo, podemos considerar que levar em conta mais uma cláusula da condicionante é um progresso, um passo na direção certa.

Em ainda um outro exemplo, consideramos como um sinal favorável o surgimento de um problema análogo mais simples, o que também se justifica, pois a analogia é certamente uma das principais fontes da invenção. Se outros meios falharem, deveremos procurar *imaginar um problema análogo*. Portanto, quando um tal problema surge espontaneamente, por si próprio, sentimo-nos naturalmente jubilosos, sentimos que estamos a nos aproximar da solução.

Após esses exemplos, podemos agora perceber facilmente a idéia geral. Há certas operações mentais que são tipicamente úteis na resolução de problemas. (As mais comuns dessas operações constam da lista deste livro.) Se uma delas tiver sucesso (se mais um dado ficar relacionado com a incógnita — se mais uma cláusula for levada em conta — se for introduzido um problema análogo mais simples), esse sucesso será percebido como um sinal de progresso. Uma vez compreendido este ponto essencial, podemos expressar com alguma clareza a natureza de outros novos sinais de progresso. Tudo o que temos a fazer é reler a nossa lista e observar as várias indagações e sugestões que compõem, já do ponto de vista em que acabamos de nos situar.

Assim, a compreensão clara da incógnita é progresso. A disposição ordenada dos diversos dados, de tal maneira que possamos facilmente lembrar de qualquer um deles, também é progresso. A visualização nítida da condicionante como um todo pode significar um progresso essencial e a separação dessa condicionante em partes apropriadas pode constituir um importante passo à frente. Quando encontramos uma figura fácil de imaginar, ou uma notação fácil de reter, podemos razoavelmente crer que fizemos progresso. A recordação de um *problema correlato e já anteriormente resolvido* pode constituir um passo decisivo na direção certa.

E assim por diante: a cada operação mental concebida com clareza corresponde um certo sinal claramente expressável. A nossa lista, bem examinada, inclui também sinais de progresso.

Ora, as indagações e sugestões que constituem essa nossa lista são simples, óbvias, apenas bom senso comum. Para compreendê-la, não é necessária nenhuma

ciência oculta, pois bastará um pouco de bom senso e, naturalmente, alguma experiência.

4. *Sinais menos claramente expressáveis.* Quando trabalhamos intensamente, sentimos bem o ritmo do nosso progresso. Quando ele é rápido, exultamos; quando lento, ficamos deprimidos. Sentimos claramente essas diferenças sem sermos capazes de identificar qualquer sinal específico. Disposições de ânimo, sensações, aspectos gerais da situação servem para indicar o nosso progresso, mas não são fáceis de expressar. "Parece-me bom" ou "Não está tão bom", dizem os simplórios. Os mais sutis se exprimem com certa nuance. "Este é um plano bem equilibrado" ou "Não, está faltando alguma coisa e isto prejudica a harmonia". E no entanto, por detrás de expressões primitivas ou vagas, há uma inconfundível sensação de confiança que muitas vezes nos leva ao caminho certo. Se tal sensação for muito forte e surgir repentinamente, falamos de inspiração. As pessoas geralmente não duvidam de suas inspirações e algumas vezes são por elas enganadas. De fato, devemos tratar as sensações orientadoras e as inspirações da mesma maneira que tratamos aqueles sinais de progresso mais claramente expressáveis, que foram discutidos no item anterior. Confie, mas fique de olho aberto.

Siga sempre a sua inspiração, mas com uma pitada de dúvida.

[Qual é a natureza dessas sensações orientadoras? Haverá algum significado menos vago em palavras de conotações tão estéticas como "equilibrado" e "harmonioso"? Estas questões são mais especulativas que práticas, mas o presente contexto indica respostas que talvez mereçam ser enunciadas: como os sinais de progresso mais claramente expressáveis relacionam-se com o sucesso, ou fracasso, de certas operações mentais bem definidas, podemos suspeitar que as nossas sensações orientadoras menos claramente expressáveis podem estar similarmente relacionadas com outras atividades mentais mais obscuras — talvez com atividades cuja natureza seja mais "psicológica" e menos "lógica".]

5. *Como os sinais ajudam.* Tenho um plano. Percebo claramente por onde começar e quais os passos iniciais que deverei dar. Porém não vejo bem o rumo que o caminho toma mais adiante. Não estou muito certo de que o meu plano funcionará e, de qualquer maneira, ainda tenho um longo caminho pela frente. Portanto, começo cautelosamente na direção indicada pelo meu plano e me mantenho alerta para sinais de progresso. Se esses sinais forem raros e indistintos, fico hesitante. E se por muito tempo eles deixarem mesmo de aparecer, posso ficar desencorajado, voltar atrás e tentar outro caminho. Pelo contrário, se os sinais se tornarem mais freqüentes à medida que avanço, se eles se multiplicarem, a minha hesitação se desvanece, o meu moral se levanta e prossigo com confiança cada vez maior, assim como ocorreu com Colombo e seus companheiros antes de avistarem a ilha de São Salvador.

Os sinais podem orientar as nossas ações. A sua ausência pode alertar-nos de um beco sem saída e poupar-nos tempo e trabalho inúteis. A sua presença pode fazer com que concentremos o nosso esforço sobre o ponto certo.

No entanto, os sinais podem também ser enganadores. Uma vez, abandonei uma trilha por falta de sinais, mas alguém, que vinha atrás de mim e prosseguiu um pouco mais, fez uma importante descoberta — para meu grande aborrecimento e eterno arrependimento. Ele não só teve mais perseverança do que eu, mas também interpretou corretamente certos sinais que deixei de notar. Por outro lado, posso seguir alegremente por um caminho, encorajado por sinais favoráveis, e deparar-me com um obstáculo insuspeitado e intransponível.

Sim, os sinais podem nos enganar num ou noutro caso, mas eles nos guiam certo na maioria das vezes. Um caçador pode, aqui e ali, interpretar mal os rastros deixados pelos animais, mas ele precisa estar certo na média, pois do contrário a caça não poderia ser seu meio de subsistência.

É preciso experiência para interpretar corretamente os sinais. Alguns dos companheiros de Colombo certamente conheciam, por experiência, o aspecto do mar nas proximidades do litoral e assim estavam capacitados a interpretar os sinais que sugeriam estarem a se aproximar de terra. O experto sabe, por sua própria experiência, como a situação se apresenta e qual a sensação que se tem quando a solução está próxima, de tal modo que ele é capaz de interpretar os sinais indicadores dessa aproximação. O experto conhece mais sinais do que o inexperto, e os conhece melhor: a sua principal vantagem pode consistir nesse conhecimento. Um caçador experiente nota rastros de animais e avalia se eles são recentes ou antigos em casos nos quais um outro, inexperiente, seria incapaz de perceber coisa alguma.

A principal vantagem das pessoas excepcionalmente talentosas pode consistir numa espécie de sensibilidade mental extraordinária. Com sensibilidade refinada, ele percebe sutis sinais de progresso ou nota a sua falta onde os menos talentosos seriam incapazes de perceber a diferença.

[6. *Silogismo heurístico.* No item 2, deparamo-nos com um tipo de raciocínio heurístico que merece maior consideração e, também, com um termo técnico. Começemos por reformular aquele raciocínio da seguinte forma:

Quando nos aproximamos de terra, muitas vezes avistamos pássaros.
Estamos a avistar pássaros.

Portanto, torna-se mais verossímil que estejamos a nos aproximar de terra.

As duas proposições acima da linha horizontal são chamadas as *premissas* e a que fica abaixo da linha, a *conclusão*. E todo este modelo de raciocínio pode ser denominado um *silogismo heurístico*.

As proposições estão aqui enunciadas da mesma forma que no item 2, mas a conclusão está expressa por uma frase mais cuidadosa. Colombo e seus homens conjecturavam desde o princípio que, mais cedo ou mais tarde, encontrariam terra velejando para oeste. E eles deviam ter dado crédito a essa conjectura, pois, do contrário certamente não teriam partido. À medida que prosseguiam viagem, relaciona-

vam cada incidente, maior ou menor, com a questão predominante: "Estaremos a nos aproximar de terra?" A sua confiança subia e descia conforme os eventos ocorriam ou deixavam de ocorrer, e as crenças de cada um flutuavam mais ou menos diferentemente, de acordo com seus princípios e seu caráter. Toda a tensão dramática da viagem devia-se a essas variações da confiança.

O silogismo heurístico do exemplo revela um motivo razoável para uma alteração do nível de confiança. Ocasionar tais alterações é a função essencial deste tipo de raciocínio e esta característica fica mais bem expressa pela forma aqui apresentada do que por aquela outra que se encontra no item 2.

O modelo geral sugerido pelo nosso exemplo pode ser assim apresentado:

Se *A* for verdadeiro, então *B* também será verdadeiro, como sabemos.

Ora, ocorre que *B* é verdadeiro.

Portanto, *A* torna-se mais verossímil.

Ainda mais resumidamente:

Se *A* ... então *B*
B verdadeiro

A mais verossímil.

Neste enunciado esquemático, a linha horizontal substitui a palavra "portanto" e traduz a implicação, o elo essencial que liga as premissas à conclusão.]

[7. *Natureza do raciocínio plausível.* Neste livro, estamos a tratar de uma questão filosófica. Discutimos esta questão de um modo tão simples e informal, e tão distanciado das formas de expressão muito complexas, quanto nos é possível, mas de qualquer maneira o nosso assunto é filosófico. Ele está relacionado com a natureza do raciocínio heurístico e, por extensão, com um tipo de raciocínio que não é demonstrado, embora seja importante, e ao qual chamaremos, na falta de um termo melhor, de raciocínio plausível.

Os sinais que convencem o inventor de que a sua idéia é boa, as indicações que nos orientam nas atividades cotidianas, a prova circunstancial do advogado, a prova indutiva do cientista, a evidência estatística invocada em muitos e diversos assuntos — todas essas evidências coincidem em dois pontos essenciais. Primeiro, não apresentam a certeza de uma demonstração rigorosa. Segundo, são úteis a aquisição de novos conhecimentos e até indispensáveis a qualquer conhecimento que não seja puramente matemático ou lógico, a qualquer conhecimento relativo ao mundo físico. Poderíamos chamar o raciocínio em que se baseia este tipo de evidência de "heurístico", ou "indutivo" ou (se desejarmos evitar espichar o significado de termos existentes) de "raciocínio plausível". Adotamos aqui esta última designação.

O silogismo heurístico acima apresentado pode ser considerado o modelo de raciocínio plausível mais simples e mais difundido. Ele nos lembra o modelo clássico de raciocínio dedutivo, o chamado "modus tollens" de silogismo hipotético. Mostramos a seguir, lado a lado, esses modelos:

<i>Demonstrativo</i>	<i>Heurístico</i>
Se <i>A</i> ... então <i>B</i> <i>B</i> falso	Se <i>A</i> ... então <i>B</i> <i>B</i> verdadeiro
<i>A</i> falso	<i>A</i> mais verossímil

A comparação acima pode ser instrutiva, pois ela leva à compreensão, que dificilmente seria conseguida por outros meios, da natureza do raciocínio plausível (heurístico, indutivo).

Os dois modelos têm em comum a primeira premissa:

Se *A* ... então *B*.

Eles diferem na segunda premissa. As proposições:

B falso

B verdadeiro

são exatamente opostas, mas têm uma "natureza lógica semelhante" e estão no mesmo "nível lógico". A grande diferença aparece depois das premissas. As conclusões

A falso

A mais verossímil

estão em diferentes níveis lógicos e suas relações com as respectivas premissas são de uma natureza lógica diferente.

A conclusão do silogismo demonstrativo é da mesma natureza lógica das premissas. Além disso, a conclusão está completamente expressa e se apóia plenamente nas premissas. Se meu vizinho e eu concordamos em aceitar as premissas, não podemos razoavelmente discordar quanto à aceitação da conclusão, não importa quão diferentes possam ser nossos gostos ou convicções.

A conclusão do silogismo heurístico difere das premissas por sua natureza lógica: é mais vaga, não tão nítida, menos plenamente expressa. Esta conclusão se compara com uma força: tem direção e grandeza. Ela nos conduz num certo sentido: *A* se torna *mais* verossímil. Tem também uma certa intensidade: *A* pode se tornar *muito mais* verossímil ou *apenas um pouco mais* verossímil. A conclusão não fica plenamente expressa nem apoiada perfeitamente pelas premissas. *A direção é expressa e implicada nas premissas, a grandeza não*. Para qualquer pessoa razoável, as pre-

missas implicam em que *A* se torna mais verossímil (certamente não ao contrário). No entanto, meu vizinho e eu podemos honestamente discordar em relação a *quanto* mais verossímil *A* se torna, pois os nossos temperamentos, a nossa formação e as nossas razões subjetivas podem ser diferentes.

No silogismo demonstrativo, as premissas constituem *toda a base* em que se assenta a conclusão. Se ambas as premissas forem válidas, a conclusão também o será. Se recebermos nova informação que não altere a nossa confiança nas premissas, ela tampouco afetará a nossa confiança na conclusão.

No silogismo heurístico, as premissas constituem apenas uma *parte da base* em que se apóia a conclusão, a parte plenamente expressa, "visível" da base, mas há uma outra não expressa, invisível, formada por alguma outra coisa, talvez por sensações indistintas ou por razões subjetivas. Com efeito, pode ocorrer que recebamos alguma nova informação que deixe completamente intacta a confiança que depositamos em ambas as premissas, mas que influencie a confiança que temos em *A* de maneira exatamente oposta à expressa na conclusão. É até razoável achar *A* mais plausível pelas premissas do nosso silogismo heurístico. No entanto, podemos encontrar amanhã motivos que de modo algum interfiram com aquelas premissas, mas que façam *A* parecer menos plausível ou que até mesmo refutem completamente esta proposição. A conclusão pode ser abalada, e até mesmo completamente demolida, pelas comoções das partes invisíveis da sua fundação, embora as premissas, as suas partes visíveis, permaneçam perfeitamente firmes.

Estas observações parecem tornar um pouco mais compreensível a natureza heurística, indutiva e outros tipos de raciocínio plausível não demonstrativo, que se afiguram tão desconcertantes e indefiníveis quando encarados do ponto de vista da lógica puramente demonstrativa. Parecem necessários muitos outros exemplos concretos, a consideração de outros tipos de silogismo heurístico e uma investigação do conceito de probabilidade e semelhantes para completar a abordagem aqui escolhida. Para isso, ver o livro do autor intitulado *Mathematics and Plausible Reasoning*.]

As razões heurísticas são importantes, muito embora elas nada demonstrem. Faz-se necessário clarificar as nossas razões heurísticas, a despeito de que, por detrás de qualquer razão assim clarificada, haja muitas outras que permaneçam obscuras e sejam talvez até mais relevantes.

Termos, antigos e novos, que descrevem a atividade de resolver problemas são muitas vezes ambíguos. A própria atividade é de todos conhecida e muito falada, mas, como ocorre com outras atividades mentais, é difícil descrevê-la. Na falta de estudos sistemáticos, não há termos técnicos que a descrevam e, além disso, certos termos semitécnicos freqüentemente contribuem para a confusão, porque são usados com sentidos diferentes por diferentes autores.

A pequena relação que segue é constituída por alguns termos novos aqui usados e certos outros, antigos, evitados no presente livro, além de ainda outros termos, também antigos, mantidos a despeito de sua ambigüidade.

É possível que o leitor fique confuso com esta discussão terminológica, a menos que as suas noções estejam bem ancoradas em exemplos.

1. *Análise* foi muito bem definida por PAPPUS e é um termo útil, que caracteriza um processo típico de estabelecer um plano, a partir da incógnita (ou da conclusão) e caminhando no sentido dos dados (ou da hipótese). Infelizmente, a palavra adquiriu muitos significados diferentes (como exemplos, análises matemática, química, lógica) e, portanto, lastima-se ter de evitá-la no presente trabalho.

2. *Condicionante* liga a incógnita de um "problema de determinação" aos respectivos dados (ver PROBLEMAS DE DETERMINAÇÃO, PROBLEMAS DE DEMONSTRAÇÃO, 3). Neste sentido, é um termo claro, útil e indispensável. Torna-se, muitas vezes, necessário decompor a condicionante em partes diversas (ver DECOMPOSIÇÃO E RECOMBINAÇÃO, 7 e 8). Ora, cada parte da condicionante é também chamada uma condicionante. Esta ambigüidade, que às vezes se torna embaraçosa, poderia ser facilmente remediada pela adoção de um termo técnico para designar as partes da condicionante inteira. Por exemplo, cada uma dessas partes seria chamada de "cláusula".

3. *Hipótese* designa uma parte essencial de um teorema matemático do tipo mais corrente (ver PROBLEMAS DE DETERMINAÇÃO, PROBLEMAS DE DEMONSTRAÇÃO, 4). O termo, neste sentido, é perfeitamente claro e satisfatório. A dificuldade está em que cada parte da hipótese é também uma hipótese, de modo que a hipótese pode ser constituída por diversas hipóteses. O remédio estaria em chamar cada uma das partes da hipótese inteira de "cláusula" ou algo semelhante. (Comparar com as observações anteriores, a respeito de "condicionante".)

4. *Partes principais* de um problema estão descritas em PROBLEMAS DE DETERMINAÇÃO, PROBLEMAS DE DEMONSTRAÇÃO, 3 e 4).

5. *Problema de determinação, problema de demonstração* constituem um par de termos novos, adotados a contragosto para substituir termos históricos cujos sentidos ficaram, porém, irremediavelmente confusos pelo uso corrente. Nas versões latinas de textos matemáticos gregos, o nome comum a ambos os tipos de problemas é *propositio*, um "problema de determinação" é chamado simplesmente de *problema* e um "problema de demonstração", *teorema*. Na linguagem matemática clássica, as palavras proposição, problema e teorema conservam o seu sentido "euclidiano", mas tudo isso está alterado na linguagem matemática moderna. Justifica-se, portanto, a adoção dos novos termos.

6. *Raciocínio progressivo* foi usado com vários sentidos por autores diversos e com o seu antigo sentido de "síntese" (ver B) por certos outros autores. Este último sentido é aceitável, mas foge-se aqui do uso desta expressão.

7. *Raciocínio regressivo* foi usado com o seu antigo sentido de "análise" por alguns autores (comparar 1 e 6). A expressão é aceitável, mas foge-se aqui do seu uso.

8. *Síntese* foi usada por PAPPUS com um sentido bem definido, que mereceria ser conservado. Lamenta-se, porém, evitá-lo no presente livro, pelas mesmas razões apresentadas para a sua contraparte "análise" (ver 1).

9. *Solução* é um termo perfeitamente claro, quando tomado no seu sentido puramente matemático: designa qualquer objeto que satisfaça a condicionante de um "problema de determinação". Assim, as soluções da equação $x^2 - 3x + 2 = 0$ são as suas raízes, os números 1 e 2. Infelizmente, a palavra tem outros significados com os quais ela é usada, até por matemáticos, ao lado do seu sentido puramente matemático. Solução pode também significar o "processo solucionador dos problemas" ou o "trabalho dispendido em resolver o problema"; usamos a palavra neste sentido quando falamos de uma "solução difícil". Solução pode também significar o "resultado" do trabalho dispendido em resolver o problema; podemos usar a palavra neste sentido quando falamos de uma "boa solução". Ora, pode acontecer que tenhamos de mencionar, num mesmo período, o objeto que satisfaz a condicionante do problema, o trabalho de chegar a ele e o resultado desse trabalho; se cedermos à tentação de chamar de "solução" as três coisas, o período poderá não ficar muito claro.

Teste dimensional é um meio bem conhecido, rápido e eficiente de verificar fórmulas geométricas ou físicas.

1. Para relembrar o teste, consideremos um tronco de cone circular reto. Sejam

R o raio da base inferior;

r o raio da base superior;

h a altura do tronco;

S a área da superfície lateral do tronco.

Se R , r e h forem dados, S estará evidentemente determinada. Encontraremos a expressão

$$S = \pi(R + r) \sqrt{(R - r)^2 + h^2}$$

à qual desejamos aplicar o teste dimensional.

A dimensão de uma quantidade geométrica evidencia-se facilmente. Assim, R , r e h são comprimentos que, se forem medidos em centímetros, terão a dimensão cm . A área S é medida em centímetros quadrados, portanto, a sua dimensão é cm^2 . Quanto a $\pi = 3,14159 \dots$ trata-se de um simples número; se desejarmos atribuir uma dimensão a uma quantidade puramente numérica, ela deverá ser $cm^0 = 1$.

As parcelas de uma soma deverão ter a mesma dimensão, que será também a dimensão da soma. Assim, R , r e $R + r$ têm a mesma dimensão, que é cm . Como não poderia deixar de ser, as duas parcelas $(R - r)^2$ e h^2 também têm a mesma dimensão, que é cm^2 .

A dimensão de um produto é o produto das dimensões de seus fatores e a regra relativa a potências é semelhante. Substituindo, em ambos os membros da fórmula testada, as quantidades pelas suas dimensões, obtemos

$$cm^2 = 1 \cdot cm \cdot \sqrt{cm^2}.$$

Como se verifica, o teste não indica erro algum na fórmula.

Ela passou no teste.

Para outros exemplos, ver seção 14 e É POSSÍVEL VERIFICAR O RESULTADO? 2.

2. Podemos aplicar o teste dimensional ao resultado final ou aos resultados intermediários de um problema, ao nosso trabalho ou ao trabalho dos outros (muito útil para procurar erros em provas de exames) e, também, a fórmula que relembramos ou a outras a que procuramos chegar por intuição.

Se relembrarmos as fórmulas $4\pi r^2$ e $4\pi r^3/3$, da área e do volume da esfera, mas não tivermos plena certeza de quais daquelas grandezas cada uma corresponde, o teste dimensional esclarecerá a dúvida.

3. O teste dimensional é ainda mais importante na Física do que na Geometria.

Consideremos um pêndulo "simples", isto é, um pequeno corpo pesado suspenso por um fio cujo comprimento admite-se invariável e cujo peso considera-se desprezível. Sejam ℓ o comprimento do fio, g a aceleração da gravidade e T o período do pêndulo.

Considerações da Mecânica mostram que T depende apenas de ℓ e g . Podemos lembrar que

$$T = c \ell^m g^n$$

em que c , m , n são certas constantes numéricas. Isto é, supomos que T seja proporcional a certas potências de ℓ^m , g^n de ℓ e g .

Examinemos as dimensões. Como T é um tempo, é medido em segundos e a sua dimensão é s . A dimensão de ℓ é cm , a dimensão de g é $cm \cdot s^{-2}$ e a dimensão da constante numérica é 1. O teste dimensional fornece a equação

$$s = 1 \cdot (cm)^m (cm \cdot s^{-2})^n$$

ou seja

$$s = (cm)^m + n s^{-2n}$$

Ora, deveremos ter as mesmas potências para as unidades fundamentais cm e s em ambos os membros; para isso, é necessário que

$$0 = m + n$$

$$1 = -2n$$

e, portanto,

$$n = -\frac{1}{2}$$

$$m = \frac{1}{2}$$

Portanto, a fórmula para o período T deve ser da forma

$$T = c l^{\frac{1}{2}} g^{-\frac{1}{2}} = c \sqrt{\frac{l}{g}}$$

O teste dimensional é muito útil neste caso, mas não fornece tudo. Primeiro, nenhuma informação proporciona quanto ao valor da constante c (que é, na realidade, 2π). Segundo, ele nada informa quando aos limites de validade: a fórmula somente é válida para pequenas oscilações do pêndulo e apenas aproximadamente (ela é exata para oscilações "infinitamente pequenas"). A despeito destas limitações, não há dúvida de que o exame das dimensões permitiu-nos prever rapidamente, e pelos meios mais elementares, um aspecto essencial de um resultado cujo tratamento exaustivo requer recursos muito mais avançados. O mesmo ocorre em muitos outros casos semelhantes.

Trabalho subconsciente. Uma noite desejei falar com um amigo sobre um certo escritor, mas não consegui lembrar-me do seu nome. Irritei-me, pois recordava-me muito bem de um de seus contos. Lembrava-me, também, de um estória sobre o próprio autor; em suma, recordava-me de tudo, exceto do nome. Em vão insisti em relembra-lo. Na manhã seguinte, logo que pensei no aborrecimento da véspera, o nome ocorreu-me sem nenhum esforço.

É muito provável que o leitor se recorde de alguma experiência própria semelhante. E, se ele for um apaixonado por problemas, é provável que já lhe haja ocorrido algo semelhante na resolução de problemas. Muitas vezes acontece que não se obtém nenhum sucesso com um determinado problema; tem-se muito trabalho sem encontrar coisa alguma. Mas quando se volta ao problema depois de descansar uma noite, ou após alguns dias de intervalo, surge uma idéia brilhante e chega-se facilmente à solução. Pouco importa a natureza do problema; uma palavra esquecida, uma outra difícil de um jogo de palavras cruzadas, o início de uma carta importante ou a solução de um problema matemático podem ocorrer dessa maneira.

Tais eventos dão a impressão de *trabalho subconsciente*. O fato é que um problema, após uma ausência prolongada, pode voltar ao consciente com muito maior clareza, muito mais próximo da sua solução, do que quando foi deixado de lado. Quem o tornou mais claro, quem o aproximou da solução? Evidentemente a própria pessoa, que nele trabalhou *subconscientemente*. É difícil encontrar outra resposta, embora psicólogos hajam descoberto os princípios de uma outra explicação, que poderá um dia chegar a ser mais satisfatória.

Tenha ou não méritos a teoria do trabalho subconsciente, o certo é que não devemos forçar a reflexão consciente. Há momentos em que melhor é deixar o problema de lado por algum tempo. “O travesseiro é um bom conselheiro” diz um velho provérbio. Dando um descanso ao problema e a nós próprios, poderemos obter amanhã resultados melhores com menos esforço. “Se hoje não, amanhã talvez” diz outro velho ditado. Mas é conveniente não pôr de lado um problema, ao qual desejamos voltar mais tarde, sem termos a impressão de que já conseguimos alguma coisa, de que pelo menos um pequeno ponto foi estabelecido, de que algum aspecto da questão ficou de certo modo elucidado, quando paramos de trabalhar nele.

Somente voltam melhorados aqueles problemas cuja resolução desejamos ardentemente ou para a qual temos trabalhado com grande intensidade. O esforço consciente e a tensão parecem necessários para deflagrar o trabalho subconsciente. De qualquer modo, tudo se passaria com grande facilidade se assim não fosse: poderíamos resolver difíceis problemas simplesmente indo dormir ou esperando o aparecimento de um idéia brilhante.

Os antigos consideravam que um boa idéia súbita era uma inspiração, um presente dos deuses. Faz-se por merecer esse presente pelo esforço ou, pelo menos, por um desejo ardente.

Trace uma figura. Ver FIGURAS. Adote uma notação adequada. Ver NOTAÇÃO.

Utilizou todos os dados? Devido à mobilização progressiva dos nossos conhecimentos, a nossa concepção do problema é mais ampla no fim do que no princípio (PROGRESSO E CONSECUÇÃO, 1). Mas como isto ocorre? Tem tudo aquilo de que precisa? A sua concepção é correta? *Utilizou todos os dados? Utilizou toda a condicionante?* As indagações correspondentes quando se trata de um “problema de demonstração” é: *Utilizou toda a hipótese?*

1. Como exemplo, voltemos ao “problema do paralelepípedo”, formulado na seção 8 e retomado nas seções 10, 12, 14, 15. Pode acontecer que ao estudante ocorra a idéia de calcular a diagonal de uma face, $\sqrt{a^2 + b^2}$, mas daí ele não sai. O professor pode auxiliá-lo, perguntando: *Utilizou todos os dados?* O estudante não pode deixar de observar que a expressão $\sqrt{a^2 + b^2}$ não contém o terceiro dado,

c. Portanto, ele deve por c em ação. Assim, ele tem uma boa oportunidade de observar o decisivo triângulo retângulo cujos catetos são $\sqrt{a^2 + b^2}$ e c e cuja hipotenusa é a procurada diagonal do paralelepípedo. (Para outro exemplo, ver ELEMENTOS AUXILIARES, 3).

As indagações aqui tratadas são muito importantes. A sua aplicação à resolução de um problema está claramente demonstrada pelo exemplo mencionado. Elas nos podem ajudar a encontrar o ponto fraco da nossa concepção do problema. Podem, também, nos indicar um elemento que falta. Quando percebemos que ainda está faltando um elemento, naturalmente tentamos ir buscá-lo e aproveitá-lo. Assim, temos um indício, uma definida linha de ação a seguir, uma boa chance de encontrar a idéia decisiva.

2. As indagações aqui sugeridas são úteis, não apenas no preparo do argumento, como também na sua verificação. Para sermos mais concretos, admitimos que temos a demonstrar um teorema cuja hipótese compõe-se de três partes, todas elas essenciais à demonstração. Isto é, se deixarmos de lado qualquer uma dessas partes, o teorema deixará de ser verdadeiro. *A demonstração utiliza toda a hipótese? Utiliza a primeira parte da hipótese? Onde utiliza essa primeira parte? Onde utiliza a segunda parte? Onde a terceira? Ao respondermos estas perguntas, verificamos a demonstração.*

Este tipo de verificação é eficaz, instrutivo e quase sempre necessário à perfeita compreensão do argumento, se este for longo e complexo, como deverá saber O LEITOR INTELIGENTE.

3. Estas indagações visam ao exame da inteireza da nossa concepção do problema. Ela estará certamente incompleta se deixarmos de levar em conta qualquer dado ou condicionante essencial da hipótese. Mas estará também incompleta se não percebermos perfeitamente algum termo essencial. Por conseguinte, para examinar a nossa concepção, devemos indagar: *Levou em conta todas as noções essenciais envolvidas pelo problema?* (Ver DEFINIÇÕES, 7).

4. As observações precedentes exigem cautela e estão sujeitas a certas limitações. De fato, a sua aplicação imediata restringe-se a problemas “perfeitamente enunciados” e “razoáveis”.

Um “problema de demonstração” perfeitamente enunciado e razoável deve ter todos os dados necessários e nenhum dado supérfluo; a sua condicionante deve ser exatamente suficiente, nem contraditória nem redundante. Na resolução de um tal problema, temos de usar, evidentemente, todos os dados e toda a condicionante.

O objeto de um “problema de demonstração” é um teorema matemático. Se o problema for perfeitamente enunciado e razoável, todas as cláusulas da hipótese do teorema serão essenciais à conclusão. Para demonstrarmos um tal teorema, teremos de utilizar cada uma das cláusulas da hipótese.

Presume-se que os problemas matemáticos apresentados nos livros tradicionais

estejam perfeitamente enunciados e sejam razoáveis. Não devemos, porém, confiar demais nisso; se houver a mais ligeira dúvida, devemos indagar: É POSSÍVEL SATISFAZER A CONDICIONANTE? Ao tentarmos responder a esta pergunta, ou a outra semelhante, convencemo-nos de que o nosso problema é tão bom quanto deveria ser.

A indagação formulada no título do presente artigo e outras correlatas somente podem e devem ser feitas sem modificações quando soubermos que o problema que se apresenta é razoável e está perfeitamente enunciado ou quando, pelo menos, não tivermos motivos para suspeitar do contrário.

5. Certos problemas não-matemáticos podem, num certo sentido, ser “perfeitamente enunciados”. Por exemplo, admite-se que os bons problemas de xadrez só tenham uma solução, que não haja no tabuleiro qualquer peça supérflua etc.

Os PROBLEMAS PRÁTICOS, no entanto, estão longe de ser perfeitamente enunciados e exigem uma completa reconsideração das questões aqui apresentadas.

Variação do problema. Um inseto (como já foi antes mencionado) procura escapar através da vidraça, ensaia muitas vezes a mesma coisa impossível e não tenta a janela próxima, por onde entrou na sala, que continua aberta. Um camundongo pode agir com mais inteligência: preso na ratoeira, ele procura escapar espremendo-se por entre duas barras, em seguida pelas duas barras adjacentes, depois por outras barras. Ele varia, as tentativas, explora várias possibilidades. Um homem é ou deveria ser, capaz de variar as tentativas com maior inteligência, de explorar as várias possibilidades com maior compreensão, de aprender pelos seus erros e deficiências. “Continue a tentar” é o conselho popular. É um bom conselho. O inseto, o camundongo, o homem seguem-no. Mas se um deles o observa com mais sucesso do que os outros, é porque ele procura *variar o seu problema* com mais inteligência.

1. Ao fim do nosso trabalho, quando chegamos à resolução, a nossa concepção do problema encontra-se mais completa e mais adequada do que estava no começo. Se desejamos passar da concepção inicial para uma outra mais adequada, melhor adaptada, devemos tentar diversos lados e encarar o problema sob diferentes pontos de vista.

O sucesso na resolução depende da escolha do aspecto certo, de atacar a fortaleza pelo lado mais vulnerável. Para determinar o aspecto certo, o lado mais acessível, tentamos a *variação do problema*.

2. A variação do problema é essencial e este fato pode ser explicado de várias maneiras. Assim, sob um certo ponto de vista, o progresso na resolução do problema aparece como a mobilização e a organização de conhecimentos adquiridos anteriormente. Temos de extrair certos elementos da nossa memória e utilizá-los na resolução. Ora, a variação do problema nos auxilia a extrair esses elementos. Mas como?

Lembramo-nos das coisas por uma espécie de “ação de contato”, que se chama

“associação mental”: aquilo que temos agora em mente tende a nos lembrar aquilo outro com que esteve em contato em ocasião anterior (Não há aqui nem necessidade de formular mais claramente a teoria da associação, nem tampouco de discutir as suas limitações). Pela *variação do problema*, relembramos novos aspectos e, assim, criamos novas possibilidades de contratar elementos relevantes ao problema.

3. Não podemos esperar resolver um problema sério sem uma concentração intensa. Mas facilmente cansamos se concentramos intensamente a atenção num mesmo ponto. Para mantê-la viva, o objeto ao qual ela se dirige deve variar continuamente.

Se nosso trabalho progride, há algo a fazer, novos pontos a examinar, a atenção fica ocupada, o interesse se mantém. Mas se deixarmos de progredir, a atenção vacila, o interesse define e surge o risco da perda total do problema. Para escapar deste risco, temos de *nos propor uma nova indagação* sobre o problema.

A nova indagação descortina outras possibilidades de contato com os nossos conhecimentos prévios e faz reviver a esperança do estabelecimento de contatos úteis. Ela *conquista o interesse pela variação do problema*, por revelar algum novo aspecto do mesmo.

4. *Exemplo.* Calcular o volume do cone de uma pirâmide de base quadrada, sendo dados o lado da base inferior, a , o lado da base superior, b , e a altura, h , do tronco.

Este problema pode ser apresentado a qualquer turma que conheça as fórmulas que fornecem os volumes do prisma e da pirâmide. Se os alunos não aparecerem com alguma idéia própria, o professor poderá começar pela *variação dos dados* do problema. Começamos por um tronco em que $a > b$. O que ocorre quando b cresce até igualar-se a a ? O tronco transforma-se num prisma cujo volume é $a^2 h$. O que ocorre quando b decresce até tornar-se igual a 0? O tronco transforma-se numa pirâmide cujo volume é $a^2 h/3$.

Esta variação dos dados contribui, primeiro que tudo, para o interesse do problema. Depois, pode nos sugerir, de uma maneira ou de outra, a utilização dos dados acima indicados, relativos ao prisma e à pirâmide. De qualquer modo, teremos encontrado propriedades definidas do resultado procurado: a fórmula final deverá ser tal que se reduza a $a^2 h$ quando $b = a$ e a $a^2 h/3$ quando $b = 0$. É muito bom prever as propriedades do resultado que procuramos atingir, pois elas nos proporcionam valiosas indicações e, de qualquer modo, quando chegarmos à fórmula final teremos elementos para testá-la. Teremos assim, por antecipação, uma resposta à indagação: É POSSÍVEL VERIFICAR O RESULTADO? (Ver, neste artigo, o item 2.)

5. *Exemplo.* Traçar um trapézio sendo dados os seus quatro lados, a, b, c e d .

Sejam a a base inferior e c a base superior; a e c são paralelas porém desiguais, mas b e d não são paralelas. Se não ocorrer nenhuma outra idéia, poderemos começar pela *variação dos dados*.

Principiamos com o trapézio, em que $a > c$. O que ocorre quando c decresce até igualar-se a 0? O trapézio degenera num triângulo. Ora, o triângulo é uma figura simples e bem conhecida, que podemos traçar a partir de dados vários. Há uma certa vantagem em introduzir esse triângulo na figura. Basta, para isto, traçar uma só linha, a diagonal do trapézio (figura 29). Ao examinarmos o triângulo, verificamos, porém, que ele tem pouca utilidade: conhecemos dois dos seus lados, a e d , mas precisamos de três dados.

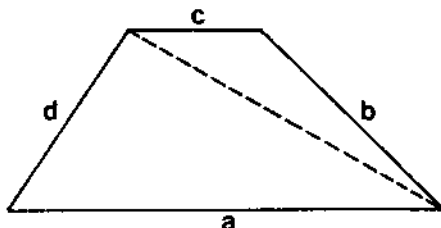


Figura 29

Façamos outra tentativa. O que acontece quando c cresce até tornar-se igual a a ? O trapézio transforma-se num paralelogramo. É possível utilizá-lo? Um ligeiro exame (figura 30) dirige a nossa atenção para o triângulo acrescentado ao trapézio original quando traçamos o paralelogramo. Este triângulo traça-se facilmente: conhecemos os três dados, os três lados b , d e $a - c$.

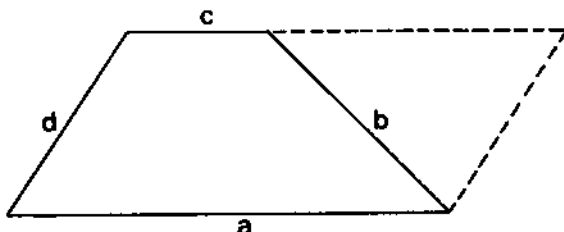


Figura 30

Pela variação do problema original (o traçado do trapézio), chegamos a um problema mais acessível (o traçado de um triângulo). Utilizando o resultado do problema auxiliar, resolvemos facilmente o nosso problema original (temos de completar o paralelogramo).

Este exemplo é típico. O fracasso do outro exemplo, o primeiro, também o é. Reexaminando este, podemos verificar que a primeira tentativa não foi tão inútil,

pois nos proporcionou alguma idéia. Em particular, deu-nos uma oportunidade de pensar em traçar um triângulo como um meio de atingir o objetivo. Com efeito, chegamos à bem sucedida segunda tentativa pela modificação da primeira, que foi infrutífera. Variamos c , primeiro aumentado-o e, em seguida, diminuindo-o.

6. Como no exemplo precedente, temos muitas vezes de tentar diversas modificações do problema. Temos de variá-lo, de reformulá-lo, de transformá-lo repetidamente até conseguirmos, finalmente, encontrar alguma coisa de útil. Podemos aprender pelos nossos fracassos: é possível surgir uma boa idéia num ensaio fracassado e, assim, podemos chegar a uma tentativa bem sucedida pela modificação de uma outra que foi infrutífera.

7. Há certos modos típicos de variação do problema que são particularmente úteis, tais como a volta às DEFINIÇÕES, à DECOMPOSIÇÃO E RECOMPOSIÇÃO, a introdução de ELEMENTOS AUXILIARES, a GENERALIZAÇÃO, a PARTICULARIZAÇÃO e a utilização da ANALOGIA.

8. O que há pouco dissemos (no item 3) acerca de indagações novas capazes de recuperar o interesse, é importante para a boa utilização da nossa lista.

O professor pode utilizar essa lista para ajudar os seus alunos. Se estes progredirem, não necessitam de auxílio e o professor não lhes deve fazer qualquer pergunta, mas sim deixá-los trabalhar sozinhos, o que é, obviamente, muito melhor para a sua independência. O professor deve, evidentemente, tentar encontrar alguma questão adequada ou sugestões que possam auxiliar os alunos, quando estes não conseguirem ir adiante, porque aí há o risco de que o estudante se canse e abandone o problema ou perca o interesse e cometa erros tolos como resultado da indiferença.

Podemos utilizar a lista na resolução dos nossos próprios problemas. Para o fazermos adequadamente, procedemos como no caso anterior. Quando o nosso progresso é satisfatório, quando novas observações surgem espontaneamente, seria simplesmente uma estupidez prejudicar esse avanço espontâneo com indagações extemporâneas. Mas quando o progresso fica bloqueado, quando nada nos ocorre, corremos o risco de cansar do problema. Então é tempo de pensar numa idéia geral que nos possa ser de utilidade, em indagações ou sugestões da lista que possam ser apropriadas ao caso. Qualquer questão que tenha possibilidade de mostrar um novo aspecto do problema será bem-vinda: ela poderá reconquistar o interesse e, assim, manter-nos a trabalhar e a pensar.

Parte 4

Problemas, Indicações, Soluções

Esta parte final oferece ao leitor oportunidades de praticar.

Os problemas não exigem outros conhecimentos preliminares além dos adquiridos num bom curso de 2º grau. No entanto, não são fáceis demais nem constituem simples problemas rotineiros. Alguns deles exigem originalidade e engenho.*

As indicações conduzem à solução, na maioria das vezes, pela citação de uma frase adequada da lista. Para um leitor muito atento, pronto a aproveitar sugestões, elas poderão revelar a idéia-chave da solução.

As soluções mostram não somente a resposta como também o procedimento que a elas conduz, muito embora, naturalmente, o leitor tenha de contribuir com alguns pormenores. Certas soluções procuram descortinar uma perspectiva ampla por meio de umas poucas palavras finais.

O leitor que haja sinceramente tentado resolver o problema tem a melhor probabilidade de tirar vantagens da indicação e da solução. Se ele chegar ao resultado por seus próprios meios, terá aprendido alguma coisa pela comparação do seu método com o apresentado no livro. Se, após um esforço sério, ficar inclinado a desistir, a indicação poderá fornecer-lhe a idéia que lhe falta. Se nem mesmo a indicação servir-lhe de ajuda, ele poderá olhar a solução, procurar isolar a idéia-chave, pôr de lado o livro e, então, tentar resolver o problema sozinho.

*Exceto quanto ao Problema 1 (bem conhecido, mas muito curioso), todos os outros são extraídos de Exames Competitivos de Matemática, da Universidade Stanford, com algumas pequenas alterações. Alguns dos problemas foram publicados no *The American Mathematical Monthly* e/ou no *The California Mathematics Council Bulletin*. Neste último periódico, foram também publicadas, pelo autor, algumas das soluções, que aqui aparecem com as necessárias adaptações.

PROBLEMAS

1. Um urso parte do ponto P e percorre um quilômetro no sentido sul. Em seguida, muda de rumo e anda um quilômetro no sentido leste. Finalmente, muda outra vez de rumo, percorre um quilômetro no sentido norte e chega exatamente ao ponto de partida. Qual é a cor do urso?

2. Roberto deseja adquirir um lote de terreno, rigorosamente plano e nivelado, limitado por quatro linhas. Dois dos limites deverão ficar exatamente na direção norte-sul e os dois outros, na direção leste-oeste. Cada uma das linhas-limite deverá medir exatamente 100 metros. Será possível encontrar um lote com estas características no estado do Paraná?

3. Roberto tem 10 bolsos e 44 moedas. Ele quer colocar as moedas nos bolsos, mas de tal maneira distribuídas que em cada bolso fique um número diferente de moedas. Será possível conseguí-lo?

4. Para numerar as páginas de um grosso volume, o tipógrafo utilizou 2.989 algarismos. Quantas páginas tem o volume?

5. Entre os papéis do vovô foi encontrado um recibo:

72 perus \$ - 67,9 -

O primeiro e o último algarismos do número, que evidentemente representava o preço total das aves, aparecem aqui substituídos por espaços em branco porque se apagaram e estão ilegíveis.

Quais serão os algarismos apagados e qual era o preço de um peru?

6. São dados um hexágono regular e um ponto situado no seu plano. Traçar uma reta que passe pelo ponto dado e divida o hexágono dado em duas partes de áreas iguais.

7. É dado um quadrado. Determinar o lugar geométrico dos pontos dos quais o quadrado é visto sob um ângulo (a) de 90° ; (b) de 45° . (Seja P um ponto situado fora do quadrado mas no mesmo plano deste. O menor ângulo com vértice em P que contenha o quadrado é o "ângulo sob o qual o quadrado é visto" de P .) Traçar cuidadosamente ambos os lugares geométricos e descrevê-los completamente.

8. Chama-se "eixo" de um sólido uma reta que liga dois pontos da sua superfície e tal que o sólido, girando em torno dessa linha, em um ângulo superior a 0° e inferior a 360° , coincida com ele mesmo.

Determinar os eixos de um cubo. Descrever claramente a localização desses eixos e calcular o ângulo de rotação de cada um deles. Admitindo que a aresta do cubo tem comprimento unitário, calcular a média aritmética dos comprimentos dos eixos.

9. Num tetraedro (não necessariamente regular), duas arestas opostas tem o mesmo comprimento a e são perpendiculares entre si. Além disso, cada uma delas é

perpendicular a uma linha de comprimento b que liga os seus pontos médios. Expressar o volume do tetraedro em função de a e b e demonstrar a resposta.

10. Numa pirâmide, o vértice oposto a base é chamado "ápice". (a) Chamemos uma pirâmide de "isósceles" se o seu ápice estiver à mesma distância de todos os vértices da base. Adotando esta definição, demonstrar que a base de uma pirâmide isósceles está inscrita num círculo cujo centro é o pé da altura da pirâmide.

(b) Chamemos agora de "isósceles" uma pirâmide cujo vértice estiver à mesma distância (perpendicular) de todos os lados da base. Adotando esta definição (diferente da anterior), demonstrar que a base de uma pirâmide isósceles está circunscrita a um círculo cujo centro é o pé da altura da pirâmide.

11. Calcular os valores de x , y , u e v que satisfazem o sistema de quatro equações

$$\begin{aligned}x + 7y + 3v + 5u &= 16 \\8x + 4y + 6v + 2u &= -16 \\2x + 6y + 4v + 8u &= 16 \\5x + 3y + 7v + u &= -16\end{aligned}$$

(Parece demorado e enfadonho: procure um atalho.)

12. Roberto, Pedro, e Paulo viajam juntos. Pedro e Paulo são bons andariços: cada um deles percorre a pé p quilômetros por hora. Roberto está com um pé machucado e dirige um pequeno carro com capacidade para duas pessoas, mas não três; o carro percorre c quilômetros por hora. Os três amigos adotaram o seguinte esquema: todos partem no mesmo momento, Paulo no carro com Roberto e Pedro a pé. Depois de certo tempo, Paulo salta do carro e passa a andar, enquanto Roberto volta para apanhar Pedro. Estes dois então viajam no carro até alcançar Paulo. Neste ponto eles trocam: Paulo passa para o carro e Pedro vai a pé, exatamente como começaram a viagem. Todo o processo é repetido quantas vezes se fizerem necessárias.

- (a) Quanto percorre, em quilômetros por hora, o grupo?
- (b) Que fração do tempo de viagem o carro viaja com uma só pessoa?
- (c) Verifique os casos extremos de $p = 0$ e $p = c$.

13. Três números estão em progressão aritmética e três outros em progressão geométrica. Somando-se sucessivamente os termos correspondentes dessas duas progressões, obtém-se

$$85, 76 \text{ e } 84$$

respectivamente, e somando-se todos os três termos da progressão aritmética, obtém-se 126. Calcular os termos de ambas as progressões.

20. De quantas maneiras será possível trocar um dólar? (A "maneira de trocar" ficará determinada quando se souber quantas das moedas divisionárias do dólar — que são 1 centavo, 5 centavos, 10 centavos, 25 centavos e 50 centavos — são utilizadas.)

INDICAÇÕES

1. *Qual é a incógnita?* A cor do urso — mas como determinar a cor de um urso a partir de dados matemáticos? *Quais são os dados?* Uma situação geométrica — mas ela parece contraditória: como poderia o urso, depois de percorrer três quilômetros, na forma descrita, voltar ao *ponto de partida*?

2. *Conhece um problema correlato?*

3. Se Roberto tivesse muitas moedas, naturalmente não teria nenhuma dificuldade em colocar nos bolsos moedas em números diferentes. *É possível reformular o problema?* Qual o menor número de moedas que pode ser colocado nos 10 bolsos, de modo que não fiquem dois bolsos com o mesmo número de moedas?

4. *Eis um problema correlato:* Se o livro contiver 9 páginas numeradas, quantos algarismos utilizará o tipógrafo? (9, é claro). Eis um outro problema correlato; se o livro contiver exatamente 99 páginas numeradas, quantos algarismos utilizará o tipógrafo?

5. *É possível reformular o problema?* Quais serão os dois algarismos apagados se o preço total, expresso em centavos, é divisível por 72?

6. *É possível imaginar um problema correlato mais acessível? Um problema mais genérico? Um problema análogo?* (GENERALIZAÇÃO, 2.)

7. *Conhece um problema correlato?* O lugar geométrico dos pontos dos quais um dado segmento de reta é visto sob um dado ângulo é composto de dois arcos circulares cujas extremidades coincidem com as extremidades do segmento e que são simétricas em relação ao segmento.

8. Presumo que o leitor conheça bem o formato do cubo e tenha encontrado alguns eixos por simples inspeção — mas serão esses todos os eixos? *Pode demonstrar que a sua relação de eixos é exhaustiva?* A sua relação é baseada num claro princípio de classificação?

9. *Considere a incógnita!* A incógnita é o volume do tetraedro — sim, sei que o volume de qualquer pirâmide pode ser calculado quando são dadas a base e a altura (é o produto de ambas, dividido por 3), mas no caso presente não é dada a base, nem a altura. *É possível imaginar um problema mais acessível?* (Não vê um tetraedro mais acessível, que seja uma parte alíquota do tetraedro dado?)

10. *Conhece um teorema correlato?* Conhece um *teorema análogo* ... mais simples ... correlato? Sim: o pé da altura é o ponto médio da base de um triângulo isósceles. Eis um *teorema correlato e já antes demonstrado*. *É possível utilizar ...*

o seu método? O teorema relativo ao triângulo isósceles é demonstrado a partir de triângulos congruentes nos quais a altura é um lado comum.

11. Presume-se que o leitor tenha conhecimento sobre sistemas de equações lineares. Para resolver um tal sistema, temos de combinar as suas equações de alguma maneira: procure as relações que existam entre as equações e que possam indicar uma combinação particularmente vantajosa.

12. *Separe as diversas partes da condicionante. É possível anotá-las?* Entre o ponto de partida e o ponto em que os três amigos voltam a se encontrar há três diferentes fases:

- (1) Roberto vai com Paulo
- (2) Roberto volta sozinho
- (3) Roberto vai com Pedro.

Chamemos t_1 , t_2 e t_3 a duração destas três fases, respectivamente. Como seria possível decompor a condicionante em partes apropriadas?

13. *Separe as diversas partes da condicionante. É possível anotá-las?* Sejam

$$a - d, \quad a, \quad a + d$$

os termos da progressão aritmética e

$$bg^{-1}, \quad b, \quad bg$$

os termos da progressão geométrica

14. *Qual é a condicionante?* As quatro raízes devem formar uma progressão aritmética. No entanto, a equação apresenta uma peculiaridade: somente contém potências pares da incógnita x . Portanto, se a for uma raiz, $-a$ também o será.

15. *Separe as diversas partes da condicionante. É possível anotá-las?* Podemos distinguir três partes na condicionante, referentes a

- (1) perímetro
- (2) triângulo retângulo
- (3) altura relativa à hipotenusa.

16. *Separe as diversas partes da condicionante. É possível anotá-las?* Sejam a e b os comprimentos (incógnitas) das linhas de visada, α e β as suas respectivas inclinações em relação ao plano horizontal. Podemos distinguir três partes na condicionante, referentes a

- (1) inclinação de a
- (2) inclinação de b
- (3) triângulo de lados a , b e c .

17. *Reconhece* os denominadores 2, 6, 24? *Conhece um problema correlato? Um problema análogo?* (INDUÇÃO E INDUÇÃO MATEMÁTICA.)

18. A descoberta por indução exige a observação. Observe os segundos membros, os termos iniciais e finais dos primeiros membros. Qual é a lei geral?

19. *Trace uma figura.* A observação da figura pode ajudá-lo a descobrir, indutivamente, a lei geral ou pode conduzi-lo às relações que existem entre T , V , L e n .

20. *Qual é a incógnita?* Que se deve procurar? Até mesmo o objetivo do problema pode precisar de algum esclarecimento. *É possível imaginar um problema correlato mais acessível? Um problema mais genérico? Um problema análogo?* Eis um problema análogo *muito simples*: de quantas maneiras pode-se pagar a quantia de um centavo? (Há apenas uma maneira.) Eis um problema mais geral: de quantas maneiras pode-se pagar a quantia de n centavos com os cinco tipos de moedas, de 1 centavo, de 5 centavos, de 10 centavos, de 25 centavos e de 50 centavos? Estamos especialmente interessados no caso particular de $n = 100$.

Nos casos particulares mais simples, para pequenos valores de n podemos imaginar a resposta sem necessidade de qualquer método complexo, só por tentativas, por inspeção. Aqui está uma pequena tabela, que o leitor deverá verificar:

n	4	5	9	10	14	15	19	20	24	25
E_n	1	2	2	4	4	6	6	9	9	13.

A primeira linha mostra as quantias a pagar, genericamente chamadas de n .

A segunda linha mostra as correspondentes "maneiras de pagar", genericamente chamadas de E_n . (A razão da escolha desta notação é segredo meu, que ainda não desejo revelar.)

Estamos especialmente interessados em E_{100} , mas há poucas esperanças de que possamos calcular E_{100} sem um método claro. Com efeito, o presente problema exige do leitor um pouco mais que os anteriores; é preciso *criar* uma pequena *teoria*.

A nossa questão é genérica (calcular E_n para um n geral, mas é "isolada". *É possível imaginar um problema correlato mais acessível? Um problema análogo?* Eis um problema análogo *muito simples*: determinar A_n , o número de maneiras de pagar a quantia de n centavos, utilizando apenas moedas de 1 centavo. ($A_n = 1$.)

SOLUÇÕES

1. Está pensando que o urso é branco e que o ponto P é o pólo Norte? *É possível demonstrar que isto é certo?* Como ficara mais ou menos entendido, idealizamos a questão. Consideramos o globo terrestre como uma esfera perfeita e o urso como um ponto material móvel. Este ponto, deslocando-se para o sul ou para o

norte, descreve um arco de *meridiano* e descreve um arco de *paralelo* quando se desloca para leste. Temos dois casos a distinguir.

(1). Se o urso retorna ao ponto P segundo um meridiano *diferente* daquele que seguiu quando deixou P , P é necessariamente o pólo norte. De fato, o único outro ponto do globo em que dois meridianos se encontram é o pólo sul, mas o urso somente poderia deixar este ponto deslocando-se para o norte.

(2) O urso poderia voltar ao ponto P pelo mesmo meridiano segundo o qual deixasse P se, ao percorrer um quilômetro no rumo leste, ele descrevesse um paralelo n vezes, podendo n ser 1, 2, 3 ... Neste caso, P não seria o pólo norte, mas um ponto situado sobre um paralelo próximo do pólo sul (e cujo perímetro, em quilômetros, seria ligeiramente inferior a $2\pi + 1/n$).

2. Representamos o globo terrestre da mesma maneira que no Problema 1. O terreno que Roberto procura é limitado por dois meridianos e dois, paralelos. Imaginem-se dois meridianos fixos e um paralelo que se *afasta* do equador: o arco do paralelo móvel, interceptado pelos dois meridianos fixos, vai-se encurtando progressivamente. O centro do terreno que Roberto procura só poderá estar situado sobre o equador; portanto, ele não poderá o encontrar no Paraná.

3. O menor número possível de moedas num bolso será, evidentemente, 0. O maior número seguinte será pelo menos 1, o maior número seguinte, pelo menos 2 ... e o número de moedas no último (décimo) bolso será pelo menos 9. Portanto, o número mínimo de moedas será

$$0 + 1 + 2 + 3 + \dots + 9 = 45.$$

Roberto não vai conseguir: ele só tem 44 moedas.

4. Um volume de 999 páginas numeradas precisa de

$$9 + (2 \times 90) + (3 \times 900) = 2\,889$$

algarismos. Se o grosso volume em questão contiver x páginas

$$\begin{aligned} 2\,889 + 4(x - 999) &= 2\,989 \\ x &= 1\,024. \end{aligned}$$

Este problema nos ensina que uma estimativa preliminar da incógnita pode ser útil (ou mesmo necessária, como no caso presente).

5. Se 679 é divisível por 72, ele o é tanto por 8 como por 9. Se é divisível por 8, o número 79 deve ser divisível por 8 (pois 1000 é divisível por 8) e, assim, 79 tem de ser 792: o último algarismo apagado é 2. Se 6792 é divisível por 9, a soma de seus algarismos deve ser divisível por 9 (regra dos "noves fora") e, portanto,

o primeiro algarismo apagado deve ser 3. O preço de um peru era (no tempo do vovô) $\$ 367,92 \div 72 = \$ 5,11$.

6. “Um ponto e uma figura com centro de simetria (num mesmo plano) são dados pelas suas posições. Determinar uma reta que passe pelo ponto dado e seja bissetriz da área da figura dada. “A reta pedida passa, naturalmente, pelo centro de simetria.” Ver PARADOXO DA INVENÇÃO.

7. Qualquer que seja a posição, os dois lados do ângulo têm de passar por dois vértices do quadrado. Como passam pelo mesmo par de vértices, o vértice do ângulo desloca-se segundo um mesmo arco de círculo (de acordo com o teorema que fundamenta a indicação). Portanto, cada um dos dois lugares geométricos pedidos é composto por diversos arcos de círculo: por 4 semicírculos no caso (a) e por 8 quadrantes no caso (b); ver figura 31.

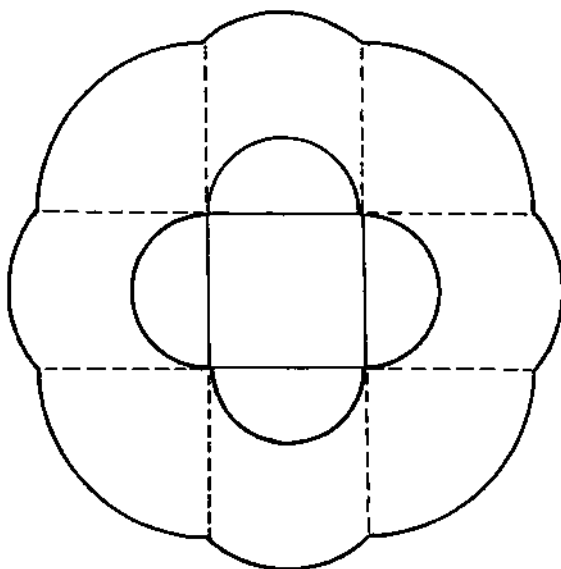


Figura 31

8. O eixo trespassa a superfície do cubo num certo ponto que ou é um vértice do cubo, ou fica sobre uma aresta, ou no interior de uma face. Se o eixo passa por uma aresta (mas não pelos seus extremos) esse ponto é o ponto médio, pois do contrário a aresta não coincidiria com ela própria após a rotação. De modo semelhante, um eixo que perfura o interior de uma face deve passar pelo seu centro. Qualquer eixo deve passar, evidentemente, pelo centro do cubo. Há, portanto, eixos de três tipos:

(1) 4 eixos, cada um passando por dois vértices opostos; ângulos de 120° e 240° ;

(2) 6 eixos, cada um passando pelos pontos médios de duas arestas opostas; ângulos de 180° ;

(3) 3 eixos, cada um passando pelo centro de duas faces opostas; ângulos de 90° , 180° e 270° .

Para o comprimento de cada eixo do primeiro tipo, ver seção 12; os outros são ainda mais fáceis de calcular. A média procurada é

$$\frac{4\sqrt{3} + 6\sqrt{2} + 3}{13} = 1,416.$$

(Este problema é útil no estudo da Cristalografia. O leitor que tenha bons conhecimentos do Cálculo Integral poderá observar que a média calculada constitui uma aproximação razoável para a "largura média" do cubo, que na realidade é $3/2 = 1,5$.)

9. O plano que passa por uma aresta de comprimento a e pela perpendicular de comprimento b divide o tetraedro em dois outros tetraedros *mais acessíveis*, cada um dos quais tem por base $ab/2$ e por altura $a/2$. Portanto, o volume procurado

$$= 2 \times \frac{1}{3} \times \frac{ab}{2} \times \frac{a}{2} = \frac{a^2 b}{6}$$

10. A base da pirâmide é um polígono de n lados. No caso (a), as n arestas laterais da pirâmide são iguais; no caso (b), as alturas (traçadas a partir do ápice) das n faces laterais são iguais. Se traçarmos a altura da pirâmide e ligarmos o seu pé aos n vértices da base no caso (a), mas aos pés das alturas das n faces laterais no caso (b), obteremos, em ambos os casos, n triângulos retângulos dos quais a altura (da pirâmide) é um lado comum: posso afirmar que esses n triângulos retângulos são congruentes. De fato, a hipotenusa [uma aresta lateral no caso (a), a altura lateral no caso (b)] tem o mesmo comprimento em ambos, de acordo com as definições propostas no enunciado do problema; apenas acrescentamos que um outro lado (a altura da pirâmide) e um ângulo (reto) são comuns a todos. Nos n triângulos congruentes, os terceiros lados devem também ser iguais; eles são traçados a partir do mesmo ponto (o pé da altura) no mesmo plano (o da base). Além disso, formam n raios de um círculo circunscrito a, ou inscrito na, base da pirâmide, respectivamente nos casos (a) e (b). [No caso (b), resta, porém, a demonstrar que os n raios mencionados são perpendiculares aos respectivos lados da base; isto se deduz de um conhecido teorema da Geometria Espacial, relativo a projeções.]

11. Observe-se que a relação existente entre a primeira equação e a última é semelhante à que existe entre a segunda e a terceira: os coeficientes dos termos do

primeiro membro são os mesmos, mas na ordem inversa, enquanto que os do segundo membro são opostos. Somando a primeira equação à última e a segunda à terceira:

$$\begin{aligned} 6(x + u) + 10(y + v) &= 0, \\ 10(x + u) + 10(y + v) &= 0. \end{aligned}$$

Este resultado pode ser considerado como um sistema de duas equações lineares a duas incógnitas, $x + u$ e $y + v$, que facilmente fornece

$$x + u = 0, \quad y + v = 0.$$

Substituindo u por $-x$ e v por $-y$ nas duas primeiras equações do sistema original encontramos

$$\begin{aligned} -4x + 4y &= 16 \\ 6x - 2y &= -16. \end{aligned}$$

Este sistema simples fornece

$$x = -2, \quad y = 2, \quad u = 2, \quad v = -2.$$

12. Entre o ponto de partida e o ponto de encontro, os três amigos percorreram a mesma distância. (Lembre-se: distância = velocidade $\times$ tempo.)

Distinguímos duas partes na condicionante:

Roberto percorreu a mesma distância que Paulo:

$$ct_1 - ct_2 + ct_3 = ct_1 + pt_2 + pt_3,$$

Paulo percorreu a mesma distância que Pedro;

$$ct_1 + pt_2 + pt_3 = pt_1 + pt_2 + ct_3.$$

A segunda equação fornece

$$(c - p)t_1 = (c - p)t_3.$$

Admitimos, é claro, que o carro é mais rápido que um pedestre, portanto $c > p$.
Donde

$$t_1 = t_3;$$

isto é, Pedro anda tanto quanto Paulo. Da primeira equação, concluímos que

$$\frac{t_3}{t_2} = \frac{c+p}{c-p}$$

que é, evidentemente, também o valor de t_1 / t_2 . Daí obtemos as respostas

$$(a) \frac{c(t_1 - t_2 + t_3)}{t_1 + t_2 + t_3} = \frac{c(c + 3p)}{3c + p}$$

$$(b) \frac{t_2}{t_1 + t_2 + t_3} = \frac{c - p}{3c + p}$$

(c) De fato, $0 < p < c$. Há dois casos extremos:

Se $p = 0$, (a) fornece $c/3$ e (b) fornece $1/3$

Se $p = c$, (a) fornece c e (b) fornece 0 .

Estes resultados são fáceis de verificar sem o auxílio de cálculos.

13. A condicionante é facilmente decomposta em quatro partes, e expressas pelas quatro equações

$$\begin{aligned} a - d + bg^{-1} &= 85 \\ a + b &= 76 \\ a + d + bg &= 84 \\ 3a &= 126. \end{aligned}$$

Da última equação extrai-se $a = 42$, e da segunda $b = 34$. Somando-se as duas equações restantes (para eliminar d), obtém-se

$$2a + b(g^{-1} + g) = 169.$$

Como a e b já são conhecidos, temos agora uma equação quadrática em g , que fornece

$$g = 2, \quad d = -26 \quad \text{ou} \quad g = 1/2, \quad d = 25.$$

As progressões são

$$\begin{array}{cc} 68, 42, 16 & 17, 42, 67 \\ & \text{ou} \\ 17, 34, 68 & 68, 34, 17 \end{array}$$

14. Se a e $-a$ forem raízes de menor valor absoluto, elas serão consecutivas na progressão, a qual terá a forma

$$-3a, \quad -a, \quad a, \quad 3a.$$

Portanto, o primeiro membro da equação deverá assumir a forma

$$(x^2 - a^2) (x^2 - 9a^2).$$

Efetuada a multiplicação e comparando os coeficientes de potências iguais, obtemos o sistema

$$\begin{aligned} 10a^2 &= 3m + 2 \\ 9a^4 &= m^2. \end{aligned}$$

Por eliminação

$$19m^2 - 108m - 36 = 0.$$

De onde $m = 6$ ou $-6/19$.

15. Sejam a , b e c os lados, sendo o último a hipotenusa. As três partes da condicionante são expressas por

$$\begin{aligned} a + b + c &= 60 \\ a^2 + b^2 &= c^2 \\ ab &= 12c. \end{aligned}$$

Observando-se que

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

obtém-se

$$(60 - c)^2 = c^2 + 24c.$$

Portanto, $c = 25$ e $a = 15$, $b = 20$ ou $a = 20$, $b = 15$ (não faz diferença quanto ao triângulo).

16. As três partes da condicionante são expressas por

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{x}{a},$$

$$\operatorname{sen} \beta = \frac{x}{b},$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

A eliminação de a e b fornece

$$x^2 = \frac{c^2 \operatorname{sen}^2 \alpha \operatorname{sen}^2 \beta}{\operatorname{sen}^2 \alpha + \operatorname{sen}^2 \beta - 2 \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta \cos \gamma}$$

17. Supomos que

$$\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \dots + \frac{n}{(n+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$$

Seguindo o modelo da INDUÇÃO E INDUÇÃO MATEMÁTICA, indagamos: a fórmula suposta permanecerá verdadeira quando passamos do valor n para o valor seguinte $n+1$? Juntamente com a fórmula acima, deveremos ter

$$\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \dots + \frac{n}{(n+1)!} + \frac{n+1}{(n+2)!} = 1 - \frac{1}{(n+2)!}$$

Verifique, subtraindo esta última da anterior

$$\frac{n+1}{(n+2)!} = -\frac{1}{(n+2)!} + \frac{1}{(n+1)!}$$

que se reduz a

$$\frac{n+2}{(n+2)!} = \frac{1}{(n+1)!}$$

e esta última equação é evidentemente verdadeira para $n = 1, 2, 3 \dots$ de onde, seguindo o modelo acima referido, podemos demonstrar a nossa suposição.

18. Na n ésima linha, o segundo membro parece ser n^3 e o primeiro membro parece ser a soma de n termos. O termo final dessa soma é o n ésimo número ímpar, ou $2n-1$, em que

$$m = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2};$$

ver INDUÇÃO E INDUÇÃO MATEMÁTICA, 4. Portanto, o termo final da soma do primeiro membro deverá ser

$$2m - 1 = n^2 + n - 1.$$

Podemos deduzir de duas maneiras o termo inicial da soma considerada: voltando dois passos, a partir do termo final, encontramos

$$(n^2 + n - 1) - 2(n - 1) = n^2 - n + 1$$

enquanto que, avançando um passo, a partir do termo final, chegamos a

$$[(n - 1)^2 + (n - 1) - 1] + 2$$

o que, por simplificação rotineira, reduz-se à mesma coisa: excelente! Podemos, pois, afirmar que

$$(n^2 - n + 1) + (n^2 - n + 3) + \dots + (n^2 + n - 1) = n^3$$

na qual o primeiro membro indica a soma de n termos sucessivos de uma progressão aritmética cuja razão é 2. Se o leitor conhecer a regra para determinar a soma de uma tal progressão (a média aritmética dos termos inicial e final multiplicada pelo número de termos), poderá verificar que

$$\frac{(n^2 - n + 1) + (n^2 + n - 1)}{2} n = n^3$$

e assim demonstrar a afirmativa.

(A regra citada pode ser facilmente demonstrada com o auxílio de um figura que pouco difere da 18.)

19. O comprimento do perímetro do hexágono regular de lado n é $6n$. Portanto, este perímetro é composto de linhas-limite de comprimento unitário e contém $6n$ vértices. Por conseguinte, na transição de $n - 1$ para n , V aumenta de $6n$ unidades e, assim,

$$V = 1 + 6(1 + 2 + 3 + \dots + n) = 3n^2 + 3n + 1;$$

ver INDUÇÃO E INDUÇÃO MATEMÁTICA, 4. Por 3 diagonais que passam pelo seu centro, o hexágono fica dividido em 6 (grandes) triângulos eqüiláteros. Examinando-se um deles, verifica-se que

$$T = 6(1 + 3 + 5 + \dots + 2n - 1) = 6n^2$$

(de acordo com a regra para a soma dos termos de uma progressão aritmética, mencionada na solução do problema 18). Os T triângulos têm, em conjunto, $3T$ lados. Neste total $3T$, cada linha divisória interna é contada duas vezes, enquanto as $6n$ linhas de perímetro são contadas uma só vez. Daí

$$2L = 3T + 6n, \quad L = 9n^2 + 3n.$$

(Para os leitores mais adiantados: do teorema de Euler referente aos poliedros, segue-se que $T + V = L + 1$. Verifique esta relação!)

20. Eis um conjunto bem ordenado de problemas análogos: calcular A_n , B_n , C_n , D_n e E_n . Cada uma destas grandezas representa o número de maneiras pelas quais se pode pagar a quantia de n centavos; a diferença está nas moedas para isso utilizadas:

- A_n apenas moedas de 1 centavo
- B_n moedas de 1 e de 5 centavos
- C_n moedas de 1, de 5 e de 10 centavos
- D_n moedas de 1, de 5, de 10 e de 25 centavos
- E_n moedas de 1, de 5, de 10, de 25 e de 50 centavos.

Os símbolos E_n (agora está claro o motivo) e A_n já foram usados antes.

Todos os modos e maneiras de pagar a quantia de n centavos com os cinco tipos de moedas estão enumerados em E_n . Podemos, no entanto, distinguir duas possibilidades:

Primeira. Nenhuma moeda de 50 centavos é utilizada. O número de maneiras de assim fazer o pagamento é D_n , por definição;

Segunda. É utilizada uma moeda de 50 centavos (possivelmente mais de uma). Depois de ser entregue a primeira moeda de 50 centavos, faltará a pagar a quantia de $n - 50$ centavos, o que pode ser feito de exatamente E_{n-50} maneiras.

Inferimos que

$$E_n = D_n + E_{n-50}.$$

Analogamente,

$$D_n = C_n + D_{n-25},$$

$$C_n = B_n + C_{n-10},$$

$$B_n = A_n + B_{n-5}.$$

Um pouco de atenção revelará que estas fórmulas permanecerão válidas se fizermos

$$A_0 = B_0 = C_0 = D_0 = E_0 = 1$$

(o que, evidentemente, faz sentido) e considerarmos qualquer uma das quantidades $A_n, B_n, \dots, E_n$ como iguais a zero quando o seu índice for negativo. (Por exemplo, $E_{25} = D_{25}$, como se vê imediatamente, o que está de acordo com a nossa primeira fórmula, pois $E_{25} - s_0 = E_{-25} = 0$.)

As nossas fórmulas permitem-nos calcular as quantidades *regressivamente*, isto é, voltando a valores mais baixos de n ou a letras anteriores do alfabeto. Por exemplo, podemos calcular C_{30} por simples soma se C_{20} e B_{30} já forem conhecidos. Na tabela abaixo, a linha inicial, corresponde a A_n , e a coluna inicial, corresponde a 0, somente contém números iguais a 1. (Por quê?) A partir desses números iniciais, calculamos regressivamente os outros, por simples somas; qualquer número da tabela é igual, quer ao número que lhe fica acima, quer à soma de dois números: o que lhe fica acima e um outro situado à sua esquerda. Por exemplo,

$$C_{30} = B_{30} + C_{20} = 7 + 9 = 16.$$

Efetuem-se as contas até $E_{50} = 50$: *pode-se pagar a quantia de 50 centavos de exatamente 50 maneiras diferentes*. Levando adiante as contas, o leitor poderá verificar por si próprio que $E_{100} = 292$: *é possível trocar um dólar de 292 maneiras diferentes*.

n	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
A_n	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
B_n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
C_n	1	2	4	6	9	12	16	20	25	30	36
D_n	1	2	4	6	9	13	18	24	31	39	49
E_n	1	2	4	6	9	13	18	24	31	39	50